http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.006

Distribuição Binomial: um experimento de ensino envolvendo relações entre registros de representações semióticas no ambiente R

Pedro Marques Corrêa Neto
Mestre, UNIBAN/SP
pmcneto@globomail.com

Monica Karrer
Professora, UNIBAN/SP
mkarrer@uol.com.br

Verônica Yumi Kataoka
Professora, UNIBAN/SP
veronicayumi@terra.com.br

Resumo
Este artigo apresenta um estudo sobre Distribuição Binomial, que consistiu em um experimento de ensino, aplicado a sete alunos de Engenharia, para exploração da relação entre representações com auxílio do *software* R, sendo fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas e elaborado com base na metodologia de *Design Experiment*. Inicialmente aplicou-se um instrumento para avaliar as concepções prévias dos estudantes e, posteriormente, o experimento. Analisando os resultados dessas duas fases, observaram-se avanços nas relações entre as diversas representações e na compreensão da necessidade do modelo teórico da Binomial. Espera-se que essa proposta contribua para o ensino deste tópico.

Palavras-chave: Distribuição Binomial. Registros de Representações Semióticas. *Software* R. Registro Gráfico. *Design Experiment*.

Binomial distribution: a teaching experiment involving relationships between semiotic representation registers in the environment R

Abstract
This article presents a study of binomial distribution which consisted of a teaching experiment, applied to seven engineering students, exploring the relationship between representations using the software R. It was based on the semiotic representation registers theory and on design experiment methodology. Initially an instrument was applied to assess students' prior knowledge and then the experiment was performed. Analysis of the results of these two phases showed advances in relations between different representations and in understanding of the necessity of the binomial theoretical model. It is hoped that this finding will contribute to the teaching of this topic.

Keywords: Binomial Distribution. Semiotic Representation Registers. Software R. Graphic Register. Design Experiment.

Introdução

Este artigo apresenta a descrição da aplicação de um experimento de ensino sobre Distribuição Binomial, elaborado de forma a explorar as relações entre representações semióticas de diversos registros e desenvolvido nos ambientes papel&lápis e *software* R. Salienta-se que conhecimentos de Probabilidade e de Estatística são importantes para que o cidadão tenha a capacidade de interpretar dados e tomar decisões de maneira crítica. Nesse contexto inferencial, a Distribuição Binomial é um dos principais modelos probabilísticos, sendo utilizada para analisar situações dicotômicas do cotidiano, como por exemplo, a germinação de uma semente, a intenção de voto para um determinado candidato e a ocorrência de uma doença.

A Distribuição Binomial é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos numa sequência de n tentativas independentes, em que para cada tentativa só existem dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, com uma probabilidade "p" de sucesso de ocorrência do evento. Sendo assim, essa distribuição é definida por dois parâmetros "n" e "p", e pode ser representada por diferentes registros, tais como, língua natural, simbólico-algébrico e gráfico.

Partindo da importância de um trabalho de integração de diversos registros, fornecendo ao sujeito condições de interpretar e relacionar o objeto matemático nas suas diferentes representações, foi adotada a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2000, 2006) para fundamentar o presente estudo. Optou-se por utilizar como ferramenta de apoio o software R, que representa um ambiente computacional baseado em linguagem de programação orientada a objetos e que permite atividades integradas de manipulação, análise e representação gráfica de dados. Esta ferramenta disponibiliza uma grande variedade de métodos estatísticos, tais como modelagem linear e não linear, testes estatísticos clássicos, séries temporais, métodos multivariados, dentre outros, sendo o resultado de um esforço colaborativo mundial de pesquisadores de diversas áreas, dentre elas, as de Estatística e de Engenharia de Software. O software R está disponível sob os termos da GNU *General Public License da Free Software Foundation*, na forma de código aberto (*open source*), podendo ser compilada e rodada em um grande número de plataformas UNIX e similar (incluindo FreeBSD e Linux), além do *Windows* 9x/NT/2000 e MaCOs, o que favorece sua instalação em instituições de ensino nos diferentes níveis. Além desse fato, a seleção desse recurso para o presente trabalho se deu pela sua compatibilidade com a teoria dos registros de representações semióticas, dado que ele permite a análise dinâmica e simultânea de representações dos registros simbólico-algébrico e gráfico, uma vez que há a possibilidade da manipulação dos valores dos parâmetros "n" e "p" da Distribuição Binomial para verificar suas influências no registro gráfico.[1]

O experimento de ensino sobre Distribuição Binomial foi elaborado com base na metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), e teve como objetivo identificar em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre esse objeto matemático influenciaria os estudantes na construção e na compreensão deste tópico.

A hipótese inicial era de que o experimento de ensino proposto permitiria aos estudantes identificar as características da Distribuição Binomial, compreender a importância de um modelo teórico para o cálculo das probabilidades, determinar relações entre representações de diversos registros e estabelecer os parâmetros dessa distribuição partindo do registro gráfico, detectando as consequências que uma alteração em um dos parâmetros da distribuição refletiria neste tipo de representação. Na seção seguinte, apresenta-se uma breve descrição da fundamentação teórica e da revisão de literatura que embasaram a construção e o desenvolvimento dessa pesquisa.

Fundamentação Teórica

Como dito, para fundamentar esse estudo utilizou-se a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2000, 2006). Foram elaboradas atividades sobre Distribuição Binomial, trabalhando com representações dos registros gráfico, simbólico-algébrico e da língua natural de forma integrada. Segundo este pesquisador, a Matemática tem uma peculiaridade em relação às outras ciências, uma vez que o acesso a seus objetos só é possível por meio de um sistema de representação semiótica.

Um registro de representação semiótica é um sistema que permite três atividades cognitivas, denominadas formação, tratamento e conversão. Como exemplos de registros, podem ser citados o simbólico-algébrico, o da língua natural, o gráfico e o figural.

Ao realizar uma transformação entre representações, é possível que ocorram atividades cognitivas de tratamento ou de conversão. No tratamento, as transformações ocorrem no interior de um mesmo registro, enquanto que na conversão estas transformações ocorrem entre representações de registros distintos.

1 Para maiores detalhes sobre o uso desse software no presente trabalho, consultar: www.uniban.br/pos/educamat/pdfs/teses/anteriores/Pedro%20Marques%20Correa%20Neto.pdf

Se os tratamentos em um registro puderem ser realizados de maneira algoritmizável, ele é classificado como monofuncional. Caso contrário, ele é denominado multifuncional. Se ele permitir o discurso, é denominado discursivo. Nestas condições, o autor classifica o registro simbólico-algébrico em monofuncional discursivo, a língua natural em multifuncional discursivo, o gráfico em monofuncional não discursivo e o figural em multifuncional não discursivo. Exemplos dessa classificação são apresentados na Figura 1.

Segundo Duval (2000), principalmente nos níveis superiores de ensino, os registros monofuncionais discursivos são os privilegiados.

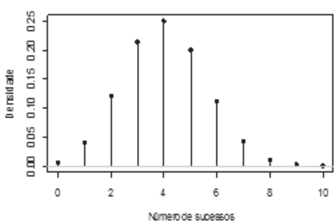
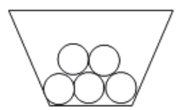
	MONOFUNCIONAL	MULTIFUNCIONAL
DISCURSIVO	Simbólico-algébrico $P(X=k)=\binom{n}{k}.p^k q^{n-k}$	Língua natural Um dado com faces numeradas de um a seis é lançado doze vezes. Qual a probabilidade de que a face com o número dois ocorra exatamente três vezes?
NÃO DISCURSIVO	Gráfico 	Figural 

Figura 1 – Exemplos da classificação de registros quanto à funcionalidade e à discursividade

Segundo Duval (2006) existem dois aspectos a serem observados na atividade de conversão: o da não congruência e o da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão. Para que exista congruência entre duas representações de registros distintos, é necessário que haja uma correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem possível de apreensão das unidades das duas representações e a conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Caso uma dessas condições não seja verificada, a conversão é classificada como não congruente. A questão da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão é representada pelo fato de o grau de dificuldade em um sentido de conversão nem sempre ser o mesmo que o do sentido contrário.

Vários pesquisadores que utilizaram a teoria de Duval para a análise do processo de ensino e aprendizagem dos mais variados conteúdos matemáticos do ensino superior, tais como Pavlopoulou (1993) no conteúdo de vetores e Sierpinska, Dreyfus e Hillel (1999) no conteúdo de transformações lineares, comprovaram a dificuldade dos estudantes no estabelecimento de conversões, principalmente nas não congruentes, além da predominância nos livros didáticos de um determinado registro, normalmente o simbólico-algébrico, em detrimento dos demais. No contexto nacional, destacam-se os trabalhos de Kaleff (2004) sobre as dificuldades dos professores frente à transição entre os conhecimentos euclidianos e não euclidianos, de Karrer e Jahn (2009) sobre o uso de um recurso de geometria dinâmica para favorecer a atividade de conversão com gráficos no conteúdo de transformações lineares, e o de Dallemole, Groenwald e Ruiz (2011) sobre as produções de estudantes de Licenciatura em Matemática quando deparados com a atividade cognitiva de conversão no conteúdo de circunferência. Kaleff (2004) e Karrer e Jahn (2009) destacaram a importância de se propor abordagens de ensino integrando as linguagens discursivas e as imagísticas, a fim de favorecer a atividade de conversão entre representações de registros discursivos e gráficos e, consequentemente, a compreensão de um objeto matemático. Karrer e Jahn (2009) e Dallemole, Groenwald e Ruiz (2011) discutiram as dificuldades dos estudantes na atividade de conversão.

Especificamente no que se refere ao trabalho com a Distribuição Binomial ou ao uso de representações semióticas no contexto da Estatística e da Probabilidade ou à aplicação de recurso computacional, destacam-se os trabalhos de Souza (2002), Figueiredo (2000) e Vieira (2008).

Souza (2002) desenvolveu um estudo sobre Distribuição Binomial, tendo por foco a exploração do conceito e de seu papel como ferramenta de resolução de problemas. O pesquisador observou que seus sujeitos, independente das características do enunciado proposto, utilizavam como estratégia de resolução sempre a determinação da probabilidade de sucesso, do número de sucessos e do número de tentativas, evidenciando um trabalho mais automatizado do que relacionado à compreensão do conceito.

Figueiredo (2000), que elaborou uma sequência de ensino para o estudo da probabilidade condicional, da probabilidade total e do teorema de Bayes, procurou explorar a relação entre diferentes registros de representações. O pesquisador concluiu que seus sujeitos de pesquisa tinham sucesso quando a questão era proposta no registro simbólico-algébrico, mas não quando a mesma era dada na língua natural, provavelmente pelo fato de os registros monofuncionais serem mais valorizados que os multifuncionais, conforme apontado por Duval (2000).

Vieira (2008) construiu e aplicou um experimento sobre o estudo de um conjunto de dados, explorando as relações entre diversas representações em um ambiente computacional. Concluiu que o ambiente informatizado contribuiu para a compreensão da média aritmética e da mediana, bem como para a análise e interpretação de gráficos de colunas e de pontos, sugerindo que trabalhos de investigação em Estatística incluam a exploração de registros e o trabalho com ferramentas computacionais.

Desta forma, considerando que a compreensão da Distribuição Binomial é importante no contexto inferencial, por modelar vários fenômenos do cotidiano, e que a revisão de literatura evidenciou que o trabalho com diversos registros de representação semiótica e o uso de recursos computacionais ainda exigem outras investigações para o trabalho com conteúdos de Probabilidade e de Estatística e, visando à elaboração de um cenário diferenciado para o trabalho com essa distribuição, justifica-se a importância do presente estudo. Na seção seguinte, apresenta-se a metodologia adotada, bem como a descrição dos sujeitos, do material e do ambiente no qual o experimento foi desenvolvido.

Metodologia

A metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) é voltada à construção de experimentos de domínios específicos, visando fornecer inovações no ensino de Matemática. Ela tem por objetivo investigar a trajetória do estudante na construção do conhecimento, ou seja, os indivíduos não são considerados como recipientes de tratamentos, eles representam o foco de análise. Dada essa característica, durante a aplicação do experimento, é possível realizar alterações no projeto inicial, uma vez que o processo deve se adaptar às produções dos sujeitos, sendo o professor-pesquisador um orientador do processo e o responsável em identificar os ajustes necessários para aperfeiçoá-lo. Com isso, essa metodologia é flexível, cíclica e iterativa, sendo considerada como uma ecologia de aprendizagem, no sentido de considerar todas as variáveis que possam influenciar no processo. A figura seguinte apresenta a descrição da ecologia considerada no presente estudo.

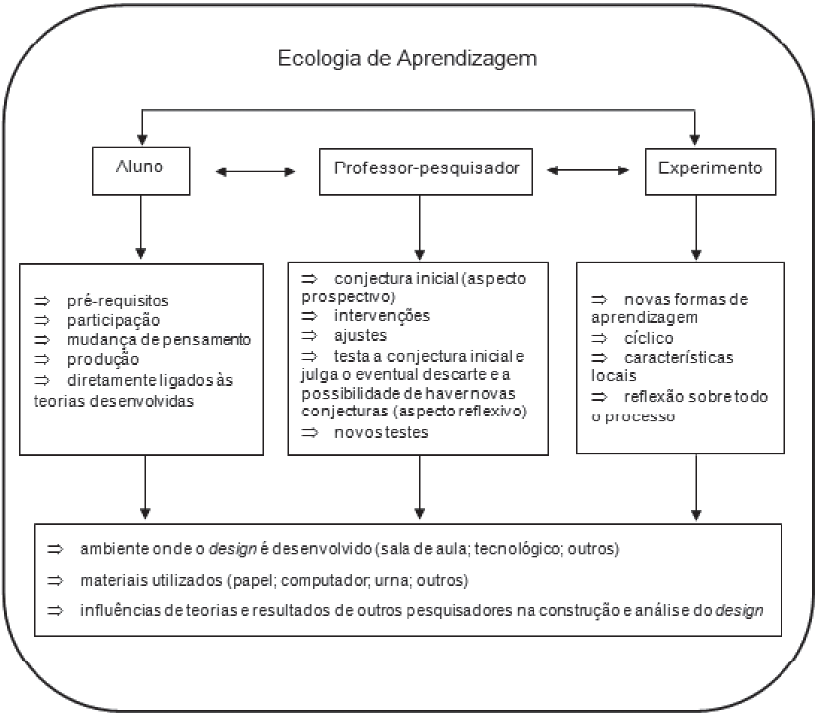


Figura 2: Ecologia de Aprendizagem

Fonte: Neto, 2010, p. 73

Visando uma análise mais detalhada do processo, foi adotada a versão em pequena escala de uma ecologia de aprendizagem. Neste caso, participaram do estudo sete voluntários do quarto semestre do curso de Engenharia de uma Instituição Particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo. Estes alunos já haviam estudado o conteúdo de Distribuição Binomial, porém, por uma abordagem que não utilizou recurso computacional e que foi baseada principalmente na exploração do registro simbólico-algébrico.

A pesquisa ocorreu tanto em sala de aula como em um laboratório de informática, sendo disponíveis quatro computadores com o *software* R instalado. Foram coletados, analisados e comparados três tipos de dados: os registros escritos nas fichas que continham as atividades propostas, as gravações das falas dos alunos e as gravações das telas dos computadores utilizando o software de captura de telas *Free Screen Recorder*. A seguir, apresenta-se a descrição e a análise da aplicação do experimento.

Descrição e análise da aplicação do experimento

O experimento foi composto por uma atividade preliminar e por oito atividades experimentais. A atividade preliminar foi realizada individualmente e objetivou investigar os conhecimentos prévios dos sujeitos, uma vez que eles já haviam tido contato anterior com o conteúdo de Distribuição Binomial (Figura 3).

Tarefa 1. Você já estudou o tópico de Distribuição Binomial? ( ) Sim ( ) Não
Caso sim, escreva sobre essa distribuição e dê um exemplo de sua aplicação.

Tarefa 2. Resolva a questão:
Considere um dado "honesto" com faces numeradas de1 a 6.
a) ao ser lançado uma única vez, qual é a probabilidade de obter a face com o número 6?
b) ao ser lançado uma única vez, qual é a probabilidade de não obter a face com o número 6?
c) se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

Tarefa 3. O gráfico seguinte representa uma Distribuição Binomial, analise -o e responda as questões.
a) qual o valor do tamanho de amostra? Justifique.
b) o valor da probabilidade de sucesso é:
( ) maior do que 0,5 ( ) menor do que 0,5 ( ) igual a 0,5
Justifique.

Figura 3 – Atividade preliminar

Fonte: Neto, 2010, p. 84

Avaliando as respostas obtidas na Tarefa 1, identificou-se que nenhum dos estudantes apresentou uma concepção sólida do conceito de Distribuição Binomial. As respostas foram dadas apenas por quatro alunos, em sua maioria no registro da língua natural, remetendo de forma vaga a noções de jogos de dados e retiradas de bolas de uma urna. A noção de árvore de possibilidades apareceu somente na produção de um aluno.

Na segunda tarefa, quatro alunos responderam corretamente os itens "a" e "b", porém, nenhum resolveu corretamente o item "c", apesar de este tipo de tarefa constituir um modelo usual nos livros didáticos. Na tarefa 3, apenas três alunos relataram que a amostra teria dez elementos, os demais alunos forneceram como resposta o valor 0,25. Por exemplo, um dos alunos registrou que "*o tamanho da amostra é 0,25, pois é o maior valor atingido*". No item "b" dessa tarefa, quatro estudantes afirmaram que o valor da probabilidade de sucesso era menor do que 0,5, mas com justificativas inconsistentes, por exemplo, "*na coluna da probabilidade não há opção acima de 0,5 e além disto, temos mais opções para poder dar a metade*".

Partindo desses resultados, concluiu-se que esses estudantes não tinham uma compreensão satisfatória da Distribuição Binomial e que não diversificavam os registros nas suas resoluções.

A segunda fase foi composta por oito atividades, as quais foram aplicadas a duas duplas e um trio, em oito encontros de aproximadamente cinquenta minutos cada, sendo desenvolvidas nos ambientes papel e lápis e *software* R. Para que se tenha uma visão global do experimento, serão descritos os objetivos e os principais resultados de cada atividade.

A atividade 1 objetivou avaliar as conjecturas dos alunos a respeito da "chance" de ocorrer um dado evento. Notou-se que todos os estudantes relacionaram "chance" com proporcionalidade. A atividade 2 representou um experimento prático, de uma urna contendo dez bolinhas, quatro verdes e seis amarelas, os alunos deveriam retirar cinco bolinhas com reposição de forma aleatória, repetindo o experimento trinta vezes e anotando os resultados das sequências obtidas e o número de bolas verdes em cada sequência (Figura 4). Nesta fase, todos realizaram o experimento sem dificuldades.

Quadro 12-Resultados da experimentação.

Repetição	Sequência	nº de bolas verdes	Repetição	Sequência	nº de bolas verdes
1.	VVAAV	3	16.	A;A;A;A;A	0
2.	V,A,V,A,V	3	17.	AAAAA	0
3.	VAVAA	2	18.	V;V;V;V;A	4
4.	V,A,V,A,V	3	19.	VVAVV	4
5.	AAVAA	1	20.	A;V;A;V;A	2
6.	V,A,A,A,A	1	21.	VAVAA	2
7.	AAAAA	0	22.	A;A;A;A;A	0
8.	V,A,V,V,V	4	23.	VVVAA	3
9.	AAVVV	3	24.	V;A;V;A;A	2
10.	V,V,A,A,V	3	25.	AVAAV	2
11.	AAVAA	1	26.	V;A;A;A;A	1
12.	A,V,V,A,V	3	27.	AAAVV	2
13.	AAVAV	2	28.	V;A;A;V;A	2
14.	A,V,A,V,V	3	29.	AAAVA	1
15.	AVAAA	1	30.	A;V;V;V;V	4

Figura 4: Organização dos resultados da experimentação de uma dupla- Atividade 2

Fonte: Neto, 2010, p. 139

Com os resultados da experimentação, todos os estudantes preencheram a tabela das frequências relativas e, ao compararem as respostas entre eles, demonstraram surpresa em verificar valores diferentes em cada grupo. Essa situação permitiu uma discussão a respeito dos motivos que levaram a estas diferenças, porém, foram observadas dificuldades na apresentação dessas conclusões na língua natural escrita. Por exemplo, uma dupla relatou que "*o número de bolinhas eram (sic) as mesmas, mas a probabilidade de outro grupo serem (sic) iguais é nulo. Cada grupo possui uma probabilidade diferente*".

Na atividade 3 foi proposta a construção da árvore de possibilidades dessa mesma situação e, considerando X o número de bolas verdes, foi solicitada a determinação das probabilidades de $P(X)$, para X=0,1,…,5. Os alunos demonstraram dificuldade para a construção da árvore de possibilidades, da mesma forma que a pesquisa de Figueiredo (2000). Assim, foi necessária a intervenção do professor-pesquisador para explicar como trabalhar com este tipo de representação, apresentando uma estratégia de construção para outra situação, a fim de garantir aos estudantes a continuidade do trabalho. Esse tipo de intervenção é previsto na metodologia, fornecendo meios para que os estudantes evoluam em suas compreensões. Após isso, os alunos foram capazes de construir a árvore de forma correta. (Figura 5).

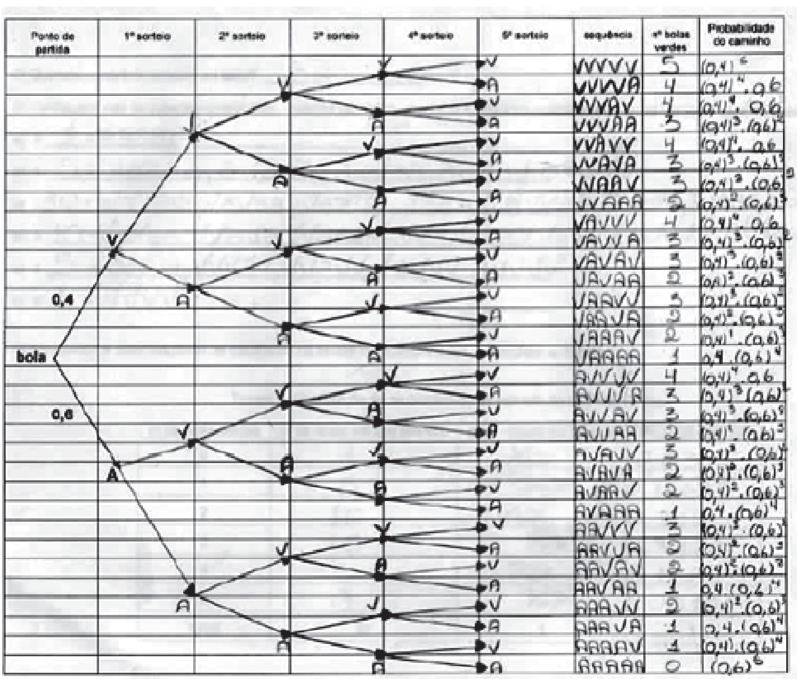


Figura 5: Árvore de possibilidades construída por uma dupla- Atividade 3

Fonte: Neto, 2010, p. 147

Ainda nesta atividade, os alunos sistematizaram os resultados da árvore em uma tabela, apresentando a relação entre a expressão matemática, o cálculo da probabilidade de X bolas verdes, com X=0,1,…,5, e o valor da probabilidade (Figura 6).

Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes

nº de bolas verdes	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0	$1.(0,6)^5$	0,07776
1	$5.0,4.(0,6)^4$	0,2592
2	$10.(0,4)^2.(0,6)^3$	0,3456
3	$10.(0,4)^3.(0,6)^2$	0,2304
4	$5.(0,4)^4.0,6$	0,0768
5	$1.(0,4)^5$	0,01024
Total	//	1

Figura 6: Resolução de uma dupla – Atividade 3

Fonte: Neto, 2010, p. 149

Na atividade 4 foi proposto um quadro comparativo entre os resultados das frequências relativas obtidos na experimentação e as probabilidades obtidas por meio da construção da árvore de possibilidades. Ainda, foram solicitadas a cada grupo a comparação de seus resultados com os dos colegas e a análise da diferença entre as duas formas de calcular probabilidades. Por fim, os alunos construíram os gráficos das duas situações, novamente comparando os resultados com os dos colegas.

A maioria dos alunos percebeu que a diferença entre os dois métodos estava na aleatoriedade do experimento prático em contraposição ao método teórico de cálculo pela árvore de possibilidades. Ainda, os estudantes constataram que, no primeiro caso, cada dupla obteve um resultado, enquanto na resolução pela árvore de possibilidades todos encontraram os mesmos resultados, sendo tal fato observado nos registros simbólico-algébrico, gráfico e da língua natural.

Inicialmente duas duplas apresentaram dificuldades em relatar na língua natural escrita o que constataram na comparação entre os resultados dos grupos, sendo necessária a interferência do professor-pesquisador para que houvesse avanços neste tipo de representação. Os estudantes destas duplas também apresentaram dúvidas na construção gráfica, em relação à graduação dos eixos e se deveriam “unir” os pontos com segmentos de retas. Vieira (2008) também verificou que seus sujeitos apresentavam dificuldades na construção de gráficos de colunas e de pontos e que o uso de um recurso computacional minimizou essas dificuldades. O professor-pesquisador interferiu questionando-os sobre os valores obtidos e as características do experimento realizado para que pudessem refletir sobre o gráfico. Um dos grupos ainda continuou ligando os pontos com segmentos de retas, então, no momento da comparação dos gráficos entre os elementos dos grupos, os próprios alunos se encarregaram de explicar porque eles não poderiam unir os pontos com segmentos de retas, obtendo, assim, sucesso na resolução (Figura 7).

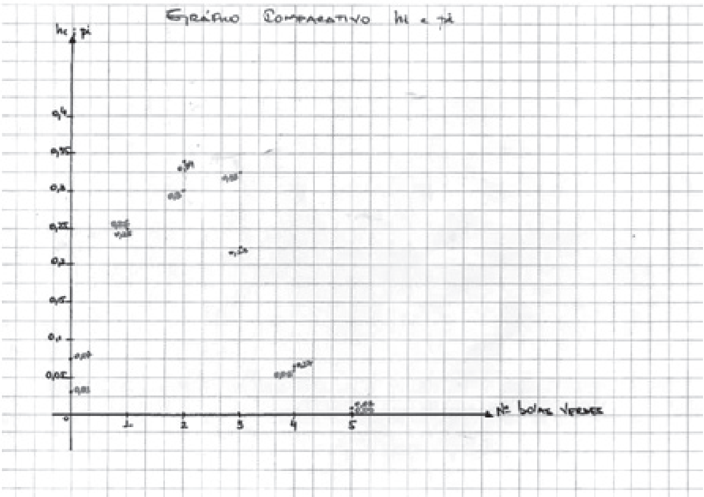


Figura 7: Resolução de uma dupla – Atividade 4

Fonte: Neto, 2010, p. 163

Constatou-se que o objetivo da atividade foi atingido, pois os estudantes puderam comparar os resultados experimentais e teóricos, fornecendo, apesar das dificuldades iniciais, uma análise satisfatória nos registros simbólico-algébrico, gráfico e da língua natural. Ressalta-se que as discussões conjuntas foram primordiais para que as duplas refletissem sobre suas produções e dificuldades.

Na atividade 5, pretendia-se que os estudantes construíssem a fórmula que determinaria a probabilidade do número de bolinhas verdes, com base na construção realizada na atividade anterior. Para tal, os alunos deveriam resolver a atividade apresentada na Figura 8.

nº de bolas verdes	nº de vezes em que aparece	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0	1		
1	5		
2	10		
3	10		
4	5		
5	1		
Total	32	//	1

$P(X=0)=$ $\quad P(X=2)=$ $\quad P(X=4)=$

$P(X=1)=$ $\quad P(X=3)=$ $\quad P(X=k)=$

Figura 8: Determinação da fórmula de *P*(*X*=*k*)

Fonte: Neto, 2010, p. 166

Os estudantes preencheram corretamente os dados solicitados, porém, não conseguiram determinar $P(X=k)$, ou seja, a fórmula da probabilidade neste tipo de distribuição. Com uma pequena intervenção do professor-pesquisador, institucionalizando os símbolos "p" para a probabilidade de sucesso e "q" para a de insucesso, os estudantes notaram que parte da fórmula seria $p^k q^{n-k}$, porém, para a determinação do número binomial $\binom{n}{k}$, foi necessária uma intervenção mais intensa do professor-pesquisador. Ele fez uma revisão de conteúdos de análise combinatória e, somente após isso, os estudantes puderam associar os resultados com a fórmula de número binomial.

Na Atividade 6 foram propostos dois problemas semelhantes aos encontrados em livros didáticos, nos quais os estudantes deveriam identificar o número de tentativas, o número de sucessos e a probabilidade de sucesso, aplicando a fórmula obtida na atividade anterior (Figura 9). Pretendia-se verificar se, após esta etapa do experimento, os estudantes conseguiriam resolver situações semelhantes às apresentadas na atividade preliminar, nas quais eles não tiveram sucesso.

Resolva os seguintes problemas:
1) Uma prova é constituída de 7 questões em forma de teste, com cinco alternativas em cada teste, onde apenas uma é correta. Se um aluno "chutar" todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar:
a) exatamente seis questões? b) exatamente quatro questões? c) exatamente uma questão?
2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:
a) exatamente quatro vezes? b) exatamente seis vezes? c) exatamente dez vezes?

Figura 9: Problemas da atividade 6

Fonte: Neto, 2010, p. 101

Dois grupos apresentaram a resposta correta para os dois problemas, apesar de a produção escrita apresentar problemas notacionais. O outro grupo não obteve sucesso, evidenciando que a atividade anterior não foi suficiente para fundamentar a resolução desta atividade. No caso, este grupo considerou o número binomial como uma fração e não conseguiu identificar a probabilidade de sucesso. O professor--pesquisador solicitou que os alunos desse grupo explicassem o raciocínio utilizado na resolução da tarefa e refletissem sobre a discussão realizada a respeito do conteúdo de análise combinatória e, somente após essa etapa, eles perceberam as incorreções cometidas, refazendo satisfatoriamente todos os cálculos.

A Atividade 7 foi desenvolvida no ambiente R e teve por objetivo propor ao estudante situações nas quais ele poderia avaliar as relações entre os registros gráfico e simbólico-algébrico da Distribuição Binomial (Figura 10).

Tarefas:

a) O que representa *n*?
b) O que representa *p*?
c) Aumentando *n*, o que ocorre com o gráfico?
d) Aumentando *p*, o que ocorre com o gráfico?
e) Se *n* = 30 e *p* = 0,2, verifique no gráfico qual o valor da *P(X=4)*
f) Se *n* = 8 e *p* = 0,3, determine a probabilidade de cada "*X*" e verifique qual o valor da soma dessas probabilidades.
g) Sabe-se que a média da distribuição, indicada por *E(X)*, é dada por *E(X)=n.p*.
Em cada caso abaixo, determine *E(X)* e observe o gráfico em relação à posição da média E(X) no gráfico. Registre suas observações.
Copie e cole cada gráfico em um documento do MS-WORD.
g1) se *n*=10 e *p*=0,5, *E(X)*= ________
g2) se *n*=10 e *p*=0,2, *E(X)*= ________
g3) se *n*=10 e *p*=0,26, *E(X)*= ________
g4) se *n*=10 e *p*=0,75, *E(X)*=________
g5) se *n* =15 e *p*=0,5, *E(X)*= ________
g6) se *n*=15 e *p*=0,2, *E(X)*= ________
g7) se *n*=15 e *p*=0,26, *E(X)*= ________
g8) se *n*=15 e *p*=0,75, *E(X)*=________

Figura 10: Apresentação da Atividade 7

Fonte: Neto, 2010, p. 181

Salienta-se que esse tipo de exploração não é usual nos livros didáticos desta área. O *software* R possibilitou avaliar, de forma dinâmica, o impacto que uma mudança no "*n*" ou no "*p*", da fórmula $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$, ocasionaria no gráfico e, ainda, analisar o resultado da esperança matemática – *E(X)* na representação gráfica (Figura 11).

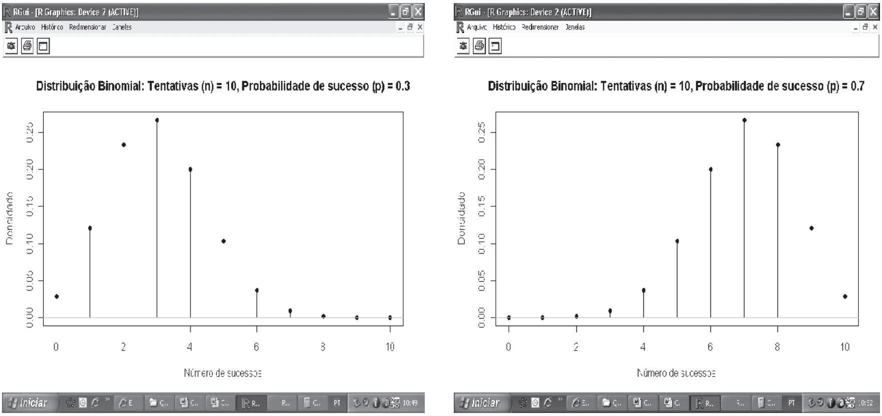


Figura 11: Distribuição Binomial no *software* R

Fonte: Neto, 2010, p. 110

Este tipo de dinâmica possibilitou ao estudante a investigação do comportamento dos gráficos, na medida em que os valores de *"n"* ou "*p*" eram alterados. Ainda, dois grupos observaram a proximidade entre o resultado de $E(X)$ e o valor de X relacionado com o maior valor de probabilidade.

Após essa exploração, foi proposta a atividade 8 no ambiente papel& lápis, sem o uso do recurso R, para verificar em que aspectos o uso da ferramenta computacional na atividade anterior favoreceu a análise gráfica. Nesta atividade foram apresentados três tipos de tarefas.

No primeiro tipo, era dado um gráfico da Distribuição Binomial, para que o aluno determinasse "*n*" e avaliasse, pela análise gráfica, se o valor de "*p*" era maior, menor ou igual a 0,5. Foram propostas seis tarefas envolvendo este tipo de dinâmica (Figura 12).

Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) *n* b) o valor de *p* é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

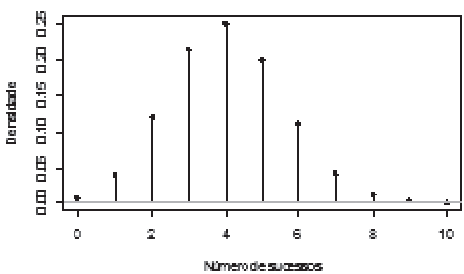


Figura 12: Tarefa da Atividade 8

Fonte: Neto, 2010, p. 112

Os alunos não tiveram dificuldade em determinar "*n*" pela leitura gráfica. Para justificar se "*p*" era maior, menor ou igual a 0,5, os alunos utilizaram uma estratégia não esperada. Eles não recorreram à análise da existência de simetria ou de deslocamento do gráfico, conforme previsto. Eles estimaram o valor de $E(X)$ tomando o elemento X de maior probabilidade e se utilizaram do registro simbólico--algébrico $E(X)=n.p$, para determinar um valor aproximado de "*p*". Atribuímos a opção por esta estratégia a dois fatores. Em primeiro lugar, na atividade anterior eles puderam observar que havia uma aproximação do valor de $E(X)$ com o valor de X associado a maior probabilidade. Um segundo fator pode ser atribuído ao fato de o ensino privilegiar o registro simbólico-algébrico, o que faz com que o estudante naturalmente recorra a ele para resolver a situação.

O segundo tipo de tarefa também partia do registro gráfico e solicitava que, por análise gráfica, o estudante determinasse "*n*" e estimasse $E(X)$, "*p*" e "*q*". Novamente os estudantes se utilizaram da mesma estratégia do exercício anterior e não tiveram dificuldades em determinar $E(X)$, "*p*" e "*q*".

O terceiro tipo de tarefa apresentava dois gráficos para que o estudante avaliasse em qual deles o valor de "*p*" estava mais próximo de 0,5 e qual deles apresentava o maior número de tentativas. Para a determinação do número de tentativas, todos os grupos afirmaram corretamente que em ambos os casos "*n*" era igual a 50. Já para avaliar qual o valor de "*p*" que estava mais próximo de 0,5, os estudantes apresentaram justificativas tanto com base no cálculo de "*p*" como por análise gráfica, evidenciando em suas produções escritas que o gráfico que tinha uma disposição com tendência centralizada era o que se relacionava com a probabilidade mais próxima de 0,5. Desta forma, observou-se que os alunos realizaram um trabalho de coordenação entre estes dois registros, o que reflete avanços na compreensão dessa Distribuição. Na seção seguinte, são apresentadas as conclusões desse estudo.

Conclusão

Estabelecendo uma avaliação dos resultados obtidos na aplicação do experimento, pôde-se observar que a abordagem do *design* influenciou positivamente em diversos aspectos. Na atividade preliminar, os alunos não apresentaram uma compreensão satisfatória da Distribuição Binomial, não reconheceram e não conseguiram resolver problemas e não determinaram "*n*" e "*p*" a partir da representação gráfica.

Após a aplicação do experimento, notou-se que a abordagem do *design* propiciou uma visão integrada do conceito por meio da exploração das relações entre representações de diversos registros, apesar de em certos momentos os estudantes valorizarem o trabalho com o registro simbólico-algébrico como estratégia de resolução de situações gráficas e apresentarem dificuldades principalmente nas representações da língua natural escrita e gráfica. Com base na metodologia adotada, o professor-pesquisador forneceu novos questionamentos e relembrou conceitos considerados pré-requisitos para a continuidade do processo.

Outro aspecto a destacar foi o fato de o experimento permitir a construção gradativa do conceito, sendo a fórmula do cálculo da probabilidade de um evento neste tipo de distribuição construída e discutida em conjunto com todos os sujeitos. Os estudantes também puderam confrontar os resultados da experimentação com os resultados teóricos, evidenciando a importância do modelo teórico da Binomial para a análise dos dados. Pelo fato de esta abordagem envolver conversões pouco usuais no ensino, como as que partem do registro gráfico, os estudantes puderam se deparar com explorações diferenciadas desse objeto matemático. Nesse contexto, o *software* R teve um papel importante, uma vez que permitiu a análise dos parâmetros "n" e "p" no gráfico, bem como a observação da proximidade entre $E(X)$ e o valor de X associado à maior probabilidade.

A avaliação das produções dos sujeitos permitiu confirmar as hipóteses inicialmente estabelecidas, uma vez que eles identificaram as características da Distribuição Binomial, evidenciaram a necessidade de um modelo teórico para o cálculo das probabilidades, estabeleceram relações entre representações de diversos registros, observando as influências dos parâmetros da Distribuição Binomial na sua representação gráfica.

Diante dos resultados aqui expostos, espera-se que esse trabalho possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade e Estatística, uma vez que traz um cenário diferenciado de ensino da Distribuição Binomial.

Referências

COBB, P.; CONFREY,J.; DISESSA, A.; LEHRER,R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. **Educational Researcher**, Washington, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DALLEMOLE, J.J.; GROENWALD, C.L.O.; RUIZ, L.M. Os registros de representação semiótica no estudo da circunferência com enfoque na geometria analítica. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 59, p. 95-112, 2011.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine.** Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education, 24, 2000, Hiroshima. **Proceedings of the 24th PME.** Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000, p. 55-69.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, n. 61, p. 103-131, 2006.

FIGUEIREDO, A. C. **Probabilidade Condicional**: um enfoque de seu ensino--aprendizagem. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

KALEFF, A.M. Sobre o poder de algumas palavras e imagens quando se busca avançar além das noções euclidianas mais comuns. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 45, p. 26-42, 2004.

KARRER, M.; JAHN, A.P. Transformações lineares planas: um estudo com base nos registros de representação semiótica e na utilização de geometria dinâmica. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, n. 55, p. 19-38, 2009.

NETO, P. M. C. **Distribuição Binomial:** um experimento de ensino utilizando o software R com foco na exploração de registros de representação semiótica. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAVLOPOULOU, K. Un problème décisive pour l´apprentissage de l’algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation. **Annales de didactique et de Sciences cognitives**, France, n. 5, p. 67-93, 1993.

R version 2.7.2 RC (2008-08-18 r46391) – Copyright (C) 2008 The R Foundation for Statistical Computing – ISBN 3-900051-07-0

SIERPINSKA, A.; DREYFUS,T.; HILLEL, J. Evaluation of a design: linear transformations. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 19, n. 1, p. 9 –39, 1999.

SOUZA, C. A. **A Distribuição Binomial no Ensino Superior**. 2002. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

VIEIRA, M. **Análise exploratória de dados**: uma abordagem com alunos do Ensino Médio. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

Submetido em março de 2012
Aprovado em junho de 2012