
O sentido do número no 1.º ciclo: uma leitura de investigação¹

Maria de Lurdes Serrazina

Professora coordenadora, Escola Superior de Educação

Instituto Politécnico de Lisboa

lurdess@esexl.ipl.pt

Resumo

Neste artigo apresento uma revisão da investigação realizada em Portugal (baseada em dissertações de mestrado e teses de doutoramento), desde o início deste século, incidindo em tópicos relativos ao tema Números e operações, numa perspetiva de sentido do número, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Comecei por identificar, ler e analisar as dissertações de mestrado e as teses de doutoramento sobre o tema, a que tive acesso, diretamente, ou através de consultas a colegas ou a repositórios institucionais. Identifiquei seis dissertações de mestrado e três teses de doutoramento. Organizei-as em dois grupos: cinco incidem principalmente nos números naturais com o zero e quatro nos números racionais. Foram analisados e confrontados objetivos, aspetos metodológicos e principais conclusões dos diferentes estudos. O artigo termina com uma síntese dos principais resultados dos diferentes estudos analisados.

Palavras-chave: Sentido do número. Significado das operações. Números racionais. Frações. Estratégias de cálculo.

The number sense on 1st cycle of Basic education: a reading from the research

Abstract

This paper presents a review of the research carried out in Portugal (based on master dissertations and doctoral theses), since the beginning of this century, focusing in topics of the theme Numbers and operations, on a perspective of number sense, with pupils from 1st cycle of basic education (1st to 4th grade). I began by identifying, reading and analysing dissertations and doctoral theses on the subject to which I had access, directly or through consultation with colleagues or institutional repositories. I identified six dissertations and three doctoral theses. I organized them into two groups: five focus mainly on natural numbers with zero and four in the rational numbers. Were analyzed and compared objectives, methodological aspects and main findings of different studies. The article ends with a synthesis of the main results from analysed research.

Keywords: Number sense. Meaning of operations. Rational numbers. Fraction. Computation strategies.

1. Uma primeira versão deste artigo foi publicada nas atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Coimbra, APM (Associação de Professores de Matemática), 2012.

Introdução

A ideia de sentido do número surge na literatura de educação matemática na segunda metade dos anos oitenta. Para Greeno (1991) *sentido do número* é um termo, que em vez de uma definição requer uma análise teórica, mas o reconhecimento de exemplos que demonstrem ou não sentido do número é possível. Trata-se de uma expressão difícil de definir, mas reconhece-se a sua presença ou ausência em contextos práticos da atividade matemática, associando-a a importantes capacidades como o cálculo mental flexível, a estimativa de quantidades numéricas e os julgamentos quantitativos. Apesar de sentido do número não poder ser definido de modo preciso, situações onde está ausente podem ser facilmente reconhecidas (HOPE, 1989) e, embora, muitos educadores não estejam de acordo sobre o que é sentido do número, a maior parte reconhece-o quando o vê.

Desde o início do século foram desenvolvidos em Portugal vários trabalhos de investigação que culminaram em dissertações de mestrado ou teses de doutoramento incidindo sobre o tema Números e operações, numa perspetiva de sentido do número. Este artigo tem como objetivo fazer uma revisão dessa pesquisa quando desenvolvida com alunos do 1.º ciclo do ensino básico².

Enquadramento teórico

Estudos relativos ao desenvolvimento do sentido do número (por exemplo, MARKOWITZ & SOWDER, 1994; YANG, 2001, 2003) mostram que o ensino que o promove é aquele que se foca na compreensão dos conceitos, criando para isso um ambiente de sala de aula onde é encorajada a comunicação, a exploração, e o raciocínio, nomeadamente promovendo a discussão de várias estratégias na resolução das tarefas.

Em Portugal aparece, pela primeira vez, no currículo o termo “sentido do número” no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), definido como:

a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou $1/2$, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números (p. 13).

Anghileri (2001) considera como aspetos centrais e definidores de um currículo, no que se refere ao entendimento dos números e operações: o papel da contagem,

2. O 1.º ciclo em Portugal engloba do 1º ao 4.º ano de escolaridade. Alunos dos 6 aos 9 anos de idade.

a importância do valor de posição, o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e o papel dos algoritmos. O desenvolvimento do sentido do número surge, assim, associado à compreensão das operações e à sua aplicação em situações de resolução de problemas. Daí que, na sala de aula, devam ser trabalhadas situações associadas a cada uma das quatro operações aritméticas, pois a investigação mostra que diversas situações-problema correspondem a diferentes significados das operações (FUSON, 1992, GREER, 1992). O programa atual (ME, 2007) considera as situações de Combinar e Acrescentar na adição, Retirar, Comparar e Completar na subtração, os sentidos aditivo e combinatório para a multiplicação, e, para a divisão, os de medida, partilha e razão.

Também a relação cálculo mental / sentido do número é realçada por diferentes autores, defendendo uma interdependência e que o desenvolvimento de um promove o desenvolvimento do outro (VAROL & FARRAN, 2007). Intimamente ligados com o desenvolvimento do cálculo mental estão as estratégias e procedimentos de cálculo. Para a adição e subtração são identificados na literatura holandesa estratégias para os números até 20 – Treffers e Buys (2001) consideram três níveis de cálculo: por contagem, por estruturação e formal – e estratégias com números de dois algarismos, superiores a 20, por exemplo, Beishuizen (1997) considera diferentes tipos de estratégias, organizados em duas categorias: N10 e 1010. Na categoria N10 (número+número de dezenas ou número-número de dezenas) à primeira parcela é adicionado ou subtraído um múltiplo de 10. Ainda nesta categoria, identifica como A10 a estratégia que à primeira parcela adiciona ou subtrai um número correspondente a uma parte da segunda, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, que é depois adicionado ou subtraído à outra parte. Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens e estas são adicionadas ou subtraídas, sendo o resultado obtido através da recomposição do número. Também para a multiplicação e divisão a investigação distingue estratégias para números dígitos e para números multidígitos. As estratégias da multiplicação com números multidígitos estão normalmente associadas a aspetos-chave como o uso, ainda que informal, das suas propriedades, em especial as propriedades associativa e distributiva (AMBROSE, BAEK & CARPENTER, 2003). Para a divisão as estratégias usadas pelos alunos dependem dos contextos, nomeadamente do facto de se tratar de contextos de medida ou de partilha.

O projeto *Desenvolvendo o sentido de número: Perspetivas e exigências curriculares* (BROCARD, SERRAZINA et al., 2008), desenvolvido em Portugal de 2005 a 2008, caracterizou-se por incluir de modo articulado o desenvolvimento curricular e a investigação. O projeto envolveu três Escolas Superiores de Educação (ESE) e os participantes foram investigadores das ESE, ligados à Didática da Matemática e educadores de infância e professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

O principal foco foi o desenvolvimento do sentido do número nos alunos dos 5 aos 12 anos, quer os números naturais com o zero, quer os números racionais. No que se refere ao desenvolvimento curricular

foram construídas, experimentadas e avaliadas, tarefas isoladas e cadeias de tarefas, ou seja grupos de 3 ou 4 tarefas concebidas de modo articulado e que refletem o modo como se pensou a trajetória de aprendizagem para temas e relações incluídas no sentido do número (p.495)

concluindo-se pela importância das condições das tarefas como estímulo aos alunos de modo a transformarem as suas noções, procedimentos e representações num nível mais elevado de compreensão.

Ao nível da investigação educacional foram identificadas e estudadas diversas questões que se prendem com a (i) aprendizagem numa perspetiva de sentido do número, (ii) práticas profissionais que favorecem o sentido do número e (iii) características do currículo que favorece o desenvolvimento do sentido do número.

Relativamente à organização da aprendizagem a partir da análise das produções dos alunos, as conclusões do projeto reafirmam a importância de “perceber qual a ligação entre o conceito ou o princípio matemático utilizado, os procedimentos de cálculo e a representação simbólica usada” (p. 503).

No atual programa do 1.º ciclo português (ME, 2007) os números racionais e, em particular a sua representação na forma de fração têm maior visibilidade. Aquela representação permite expressar uma multiplicidade de relações daí surgirem dificuldades na compreensão destes números pelos alunos do ensino básico. Estas prendem-se com os diferentes significados da fração a/b : relação parte-todo de uma unidade contínua, ou de uma unidade discreta, quociente entre dois números inteiros representado pela fração, operador partitivo multiplicativo, medida e razão (BEHR, HAREL, POST & LESH, 1992; KIEREN, 1988), dependendo dos contextos em que se inserem e da unidade a que se refere. É na síntese desta diversidade de situações e na teia de relações que os alunos vão estabelecendo, a partir delas, que o sentido do número racional se vai desenvolvendo.

Metodologia

Após consulta a repositórios institucionais e contactos informais com colegas de outras instituições identifiquei que tinham sido realizadas³, a partir do ano 2000, três

3. Apenas foram considerados os trabalhos já concluídos e aprovados em prova pública.

teses de doutoramento e seis dissertações de mestrado, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico, e com incidência no tema Números e Operações. Depois de as ler e analisar, organizei-as em dois grupos (ver tabelas 1 e 2), de acordo com o conjunto numérico em que têm maior incidência⁴ – números naturais com o zero ou números racionais. Para cada estudo fiz uma análise global focada no objetivo, metodologia utilizada e principais conclusões. Procurei, por último, traçar os aspetos comuns aos vários trabalhos, bem como aqueles que os distiguem.

Os estudos, objeto de análise, estão identificados nas Tabelas 1 e 2, que incluem o tipo de trabalho, autor, título, ano de escolaridade dos alunos envolvidos e data de conclusão do mesmo, ordenados por este último item.

Tabela 1: Trabalhos realizados no âmbito dos números naturais com o zero

Tipo de trabalho	Autor	Título	Ano escolaridade	Data
Dissertação Mestrado	Henriqueta Gonçalves	A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico	3.º	2003
Dissertação Mestrado	Andreia Gonçalves	Desenvolvimento do sentido do número num contexto de resolução de problemas no 1.º ciclo do ensino básico	1.º	2008
Dissertação Mestrado	Cristina Morais	O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no .1.º ano de escolaridade	1.º	2011
Tese de Doutoramento	Elvira Ferreira	O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade	2.º	2012
Tese de Doutoramento	Fátima Mendes	A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo	3.º	2012

Os estudos desenvolvidos no âmbito dos números naturais envolvem a resolução de problemas e focam-se nas operações aritméticas, os com foco nos números racionais centram-se no desenvolvimento do sentido do número racional⁵.

4. No caso da tese de Fátima Mendes o seu trabalho estende-se também aos números racionais, embora a maior incidência seja nos números naturais com o zero, daí a sua inclusão na Tabela 1.

5. Neste grupo o trabalho desenvolvido por Ema Mamede, embora não referindo o termo desenvolvimento do sentido do número, discute aspetos ligados à sua compreensão.

Tabela 2: Trabalhos com incidência nos números racionais

Tipo de trabalho	Autor	Título	Ano de escolaridade	Dataº
Dissertação Mestrado	Alice Carvalho	O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade	4.º	2005
Tese de Doutoramento	Ema Mamede	The effects of situations on children's understanding of fractions	1.º	2007
Dissertação Mestrado	Mª Fernanda Martins	As frações no desenvolvimento do sentido de número racional no 1.º ciclo	4.º	2007
Dissertação Mestrado	Susana Macieira	Diferentes significados de fração e a sua influência na aprendizagem dos racionais	3.º/4.º	2011

O sentido do número dos alunos envolvidos

Nesta secção apresento uma análise dos principais resultados dos diferentes estudos.

Números naturais

Os estudos de Andreia Gonçalves (2008) e de Cristina Morais (2011) foram realizados nas turmas do 1º ano onde lecionavam⁶. O primeiro teve como foco as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas numéricos, identificando as dificuldades experimentadas e os contextos favoráveis à resolução desses problemas. O segundo teve como principal objetivo compreender de que modo os alunos de 1º ano desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtração. Gonçalves (2008) organizou os problemas em seis tarefas resolvidas ao longo de seis aulas, apresentadas à turma, com recurso ao jogo, a dramatizações e/ou à utilização de materiais. De seguida, os alunos faziam o registo escrito da sua resolução, seguindo-se a fase de discussão dos resultados com toda a turma. Para cada tarefa, no próprio dia da sua resolução na aula, a investigadora fez uma entrevista, tipo clínico, a cada aluno-caso. A autora concluiu que os alunos mostraram usar estratégias e raciocínios flexíveis de cálculo que não tinham sido ensinados previamente, identificando dificuldades relacionadas com

6. Andreia Gonçalves lecionava numa escola pública, Cristina Morais numa escola privada frequentada por alunos da classe média-alta.

os contextos das tarefas, e relativos à idade dos alunos, constatando que o contexto familiar e os materiais utilizados foram uma vantagem e uma motivação para a resolução. A comunicação oral dos raciocínios contribuiu para a compreensão matemática dos alunos, ajudando-os a organizar o seu próprio pensamento e a refletir sobre as suas respostas. No estudo de Morais (2011) foram resolvidas, ao longo do ano, três cadeias de problemas, contemplando os diferentes significados das operações adição e subtração. As primeiras duas foram resolvidas a pares, na aula, e a última individualmente, três meses depois, apenas pelos alunos que constituíram os casos. Concluiu que as estratégias de cálculo usadas pelos alunos evoluíram de estratégias elementares baseadas em contagem e na utilização de factos numéricos, para estratégias de cálculo mental complexas, aditivas ou subtrativas das categorias 1010 e N10, identificando uma preferência por estratégias aditivas do tipo 1010 na resolução dos problemas de adição. Nos problemas de subtração, as estratégias variaram de acordo com o significado presente em cada um, nos de retirar foram usadas estratégias subtrativas do tipo 1010 e, nos de comparar e completar, de um modo geral, os alunos utilizaram estratégias aditivas do tipo A10. A autora afirma parecer haver influência do ambiente de aprendizagem na utilização de estratégias de cálculo mental mais eficientes, particularmente da estratégia aditiva do tipo 1010, concluindo que alunos do 1.º ano são capazes de desenvolver e utilizar estratégias de cálculo mental, que na literatura são associadas a alunos mais velhos.

O estudo de Elvira Ferreira (2012) teve também como objetivo analisar as estratégias e os procedimentos de cálculo a que os alunos recorrem num contexto de resolução de problemas de adição e subtração de números inteiros positivos e a sua contribuição para o desenvolvimento do sentido do número. Foi desenvolvido numa turma do 2.º ano, tendo subjacente um percurso de aprendizagem e foram realizados quatro estudos de caso. Os resultados mostram que os alunos utilizam uma grande diversidade de estratégias e procedimentos e estes têm relação com os contextos dos problemas apresentados. Nos problemas de subtração o recurso à estratégia de adição indireta influenciou o uso de procedimentos de cálculo mais eficientes; a diversidade dos problemas propostos (significados, grandeza e tipo de números e sua sequência), bem como as resoluções selecionadas para discussão na aula, no final de cada problema, influenciaram a evolução das estratégias e procedimentos usados pelos alunos; as diferentes componentes do sentido do número, nomeadamente, o desenvolvimento da compreensão do significado dos números e das operações, o reconhecimento da grandeza relativa dos números e da razoabilidade dos resultados e a sua aplicação nos cálculos apresentados parece terem sido desenvolvidos de modo integrado; a experiência de ensino em sala de aula e o ambiente social e sociomatemático influenciaram o desenvolvimento de estratégias e procedimentos adequados e eficientes na resolução

de problemas de adição e subtração, tendo este ambiente contribuído para o aumento da confiança dos alunos relativamente à sua capacidade matemática.

O estudo de Henriqueta Gonçalves (2003) teve por foco a multiplicação e a divisão e procurou compreender como é que as crianças lidam com problemas de multiplicação e divisão, identificando estratégias usadas e recursos utilizados aquando da sua resolução, a natureza, o uso e o desenvolvimento de métodos próprios das crianças e a sua permanência quando lhes são ensinadas estratégias mais sofisticadas. Estudou seis alunos de uma turma do 3.º ano a quem colocou, em entrevista individual, um conjunto de problemas. Os resultados apontam para uma fraca compreensão das operações de multiplicação e divisão e do sentido do número. A capacidade de escolha de uma estratégia de resolução eficaz assentou essencialmente em estratégias baseadas em procedimentos algorítmicos, com base em regras e procedimentos pré-estabelecidos. Os alunos reagiram de modo diferente conforme o tipo de problemas, parecendo haver alguns totalmente desconhecidos como os de combinatória, disposição rectangular, divisão com resto e divisão como razão. O estudo revela ainda que os alunos tendem a usar métodos próprios na resolução de problemas antes do ensino formal das operações, neste caso da divisão, que abandonam quando lhe são ensinados procedimentos mais rotineiros, com base em regras e técnicas que muitas vezes não compreendem.

Fátima Mendes (2012) teve também como foco do seu trabalho a multiplicação, mas o seu objetivo foi o de compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido do número, tendo por base uma trajetória de aprendizagem. As potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas foram descritas e analisadas. Mais especificamente, no âmbito de uma *design research* na modalidade de experiência de ensino, desenvolvida ao longo de um ano letivo, pretendeu caracterizar: os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação, a sua evolução, as dificuldades manifestadas e os aspetos do sentido de número revelados, analisando, ainda, o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem. Os participantes foram os alunos e a professora de uma turma do 3.º ano. As sequências de tarefas propostas foram elaboradas, colaborativamente, pela investigadora e pela professora, e desenvolvidas por esta na aula. Ao contrário do que afirma Gonçalves (2003), este estudo conclui que os alunos utilizam uma grande diversidade de procedimentos; havendo alguns que usam vários procedimentos para realizar um mesmo cálculo, sendo uns mais frequentes que outros, e manifestando preferência por determinados procedimentos. Os resultados mostram que a evolução dos procedimentos parece ser suportada pelas características das tarefas propostas (contextos, números e sua articulação e sequenciação) e pelo ambiente da aula e que esta evolução não é linear,

nem se processa do mesmo modo para todos os alunos – alguns persistem em certos procedimentos e outros, perante tarefas com características particulares, voltam a usar procedimentos menos potentes. A evolução dos procedimentos dos alunos evidencia, também, o desenvolvimento do seu sentido do número.

Números racionais

Dos quatro trabalhos com incidência nos números racionais (Tabela 2), três foram desenvolvidos em turmas do 3.º e/ou 4.º ano.

No seu estudo Ema Mamede (2006) não trabalhou com os alunos integrados numa turma. Investigou como situações, que envolvem frações, com diferentes significados (quociente, parte-todo e operador), influenciam a compreensão dos números racionais. Os participantes foram 80 crianças, de 6 e 7 anos, alunos do 1º ano de escolas do 1º ciclo de Braga. Foi comparado o desempenho das crianças, em situações de quociente, parte-todo e operador, em tarefas lógicas e de representação, observando o seu desempenho em problemas que envolviam a equivalência e a ordem de grandeza de números racionais representados por frações. O estudo conclui que as crianças apresentam diferentes níveis de desempenho em problemas de equivalência e de ordenação de frações, em situações de quociente e de parte-todo, e que a sua capacidade de utilizar linguagem simbólica das frações também difere nas duas situações. Os resultados foram melhores nas situações de frações como operadores em contextos discretos do que nas de parte-todo, tanto nas tarefas de equivalência como nas de ordenação. O desempenho foi melhor em problemas de ordenação do que nos de equivalência de frações, tendo sido sempre melhor nas crianças de sete anos.

Alice Carvalho (2005) realizou um estudo numa turma do 4º ano com o objetivo de perceber o processo de desenvolvimento do conceito de número racional, nomeadamente que estratégias privilegiar em cada um dos construtos: parte-todo, quociente, medida e razão e como é que a conjugação dos vários modos de representação dos números e situações matemáticas (materiais, símbolos falados, modelos figurativos, símbolos escritos e linguagem simbólica) associados a problemas da vida real podem aumentar os níveis de compreensão e a construção das ideias sobre fracionários. A investigadora e a professora da turma trabalharam em conjunto na elaboração das tarefas, analisando e refletindo sobre os resultados obtidos em cada aula, o que as levou ao aprofundamento do tema, e lhes permitiu irem adequando as tarefas ao desenvolvimento da compreensão do número racional pelos alunos. O estudo conclui que o recurso a diferentes significados de fração (quociente, parte-todo e razão) foi importante para a compreensão do conceito de número racional, em especial nos problemas onde a fração aparece com o significado parte-todo.

A diversificação da unidade (contínua e discreta) foi facilitador, o trabalho com os decimais a par do das frações ajudou no modo como os alunos operaram com os números usando estratégias pessoais; os diferentes modos de representação de números na ilustração de um problema, como os círculos-fração, o material Cuisenaire, e a sua relação com os símbolos matemáticos, pareceram ser um fator facilitador na construção do conceito de número racional, bem como o facto de os alunos verbalizarem sobre as situações e explicitarem a relação entre os materiais e os símbolos. Foram encontradas dificuldades na representação de números na reta e os círculos-fração foram o modo mais simples de representação.

Os estudos de Fernanda Martins (2007) e de Susana Macieira (2011) focalizaram-se no desenvolvimento do sentido do número racional em alunos do 1º ciclo do ensino básico, o primeiro numa turma do 4º ano e o segundo numa de 3^o/4^o anos, tendo, em ambos os casos, a investigação sido realizada na própria turma da investigadora. Uma proposta de tarefas, contemplando situações envolvendo diferentes significados de fração (quociente, parte-todo e operador) e com diferentes tipos de unidade (discreta, contínua e composta) foi elaborada a partir dos resultados do teste diagnóstico e resolvida pela turma em causa. Martins procurou identificar: os obstáculos das crianças à apropriação do sentido do número racional, as estratégias pessoais que os alunos privilegiam e como se processa a passagem das estratégias informais para a representação simbólica dos números racionais, na forma de fração e na forma decimal. Macieira pretendeu compreender a importância dos diferentes significados, o papel dos diferentes tipos de unidades e os diferentes modos de representação (desenhos, esquemas, ou símbolos) usados pelos alunos nos diferentes contextos. Martins concluiu que nas tarefas de partilha equitativa os alunos elaboraram, inicialmente, modelos visuais a partir da realidade (modelos circulares, retangulares e lineares) combinados com representações sob a forma de fração directamente relacionadas com o concreto, descrevendo relações presentes nas situações. Este contexto envolveu ativamente os alunos na procura das respostas pretendidas, permitindo o emergir de ideias intuitivas sobre frações, nomeadamente, as frações estão ligadas à divisão e à multiplicação, quanto maior o denominador mais pequena é a fração e a partilha equitativa pode ser representada por frações unitárias ou por outras frações. A progressiva passagem das representações icónicas para a linha numérica e representação simbólica sob a forma de fração e de numeral decimal facilitou a correção de alguns equívocos e ajudou alguns alunos a raciocinar sobre as situações. Concluiu ainda que, apesar de ser necessário um trabalho mais prolongado com frações, estas passaram a ser mais significativas para os alunos, quando comparadas com as representações sob a forma de numeral decimal. Para Macieira os contextos de partilha equitativa permitiram mobilizar outras formas

de representação dos números, nomeadamente a de percentagem e de numeral decimal, bem como a exploração de frações equivalentes e de adição com números representados na forma de fração, tendo os alunos compreendido melhor a lógica da equivalência de frações nestes contextos do que naqueles onde se privilegia a dimensão parte-todo. As unidades compostas a partir de outras unidades conduziram à identificação de malentendidos relacionados com a unidade de referência. Durante a resolução de problemas os alunos recorreram a vários modos de representação: linguagem oral, modelo de área (círculos e retângulos em cartolina) para representar frações, linguagem escrita e simbólica. A manipulação de materiais revelou-se um poderoso suporte na resolução das tarefas e verificação de conjeturas, permitindo uma abordagem intuitiva às frações equivalentes e o desenvolvimento de uma ponte entre as representações informais e as simbólicas.

Considerações Finais

Os estudos analisados são distintos em várias vertentes, desde logo na metodologia. Gonçalves (2003) e Mamede (2006) propuseram aos alunos, individualmente, a realização de determinadas tarefas, analisando posteriormente o seu desempenho. Os restantes sete estudos têm por base uma proposta de trabalho, embora com formato e duração muito distinto, concretizada no contexto de uma turma de alunos, tendo sido analisados o seu desempenho, individualmente ou como turma, e também as interações e raciocínios explicitados, bem como o desenvolvimento dos aspetos matemáticos envolvidos. Dos últimos sete, quatro (GONÇALVES, 2008, MACIEIRA, 2011, MARTINS, 2007 & MORAIS, 2011) são investigações sobre a prática, onde a investigadora é simultaneamente professor da turma. Os outros três estudos (CARVALHO, 2005, FERREIRA, 2012 E MENDES, 2012) basearam-se num trabalho conjunto entre a investigadora e a professora da turma, tendo esta acompanhado todo o processo desde a definição das tarefas a implementar, até à sua implementação em sala de aula e posterior reflexão.

De notar que nos estudos em que foi realizado trabalho na sala de aula, os alunos progrediram no seu conhecimento e no desenvolvimento do seu sentido do número, constituindo as tarefas realizadas uma mais-valia em termos curriculares, bem como o ambiente em que se desenvolveram, confirmando os resultados obtidos em outros estudos (por exemplo, MARKOWITZ & SOWDER, 1994; YANG, 2001, 2003). Constata-se ainda que o papel dos materiais e/ou das representações icónicas é crucial na progressão do conhecimento informal para o formal, bem como a importância atribuída aos contextos. A interdependência entre o desenvolvimento de estratégias de cálculo e do sentido do número é confirmado nos estudos realizados como é afirmado também por Varol e Farran (2007).

Referências

AMBROSE, R., BAEK, J. M., & CARPENTER, T. P. Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), **The development of arithmetic concepts and skills**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 305-336, 2003.

ANGHLIERI Contrasting approaches that challenges tradition. Em J. Anghlieri (Ed.), **Principles and practices in arithmetic teaching**. Buckingham: Open University, p. 4-14, 2001.

BEISHUIZEN, M. . Development of mathematical strategies and procedures up to 100. Em M. Beishuizen et al. (Eds.), **The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures**. Utrecht: Utrecht University, p. 127-162, 1997.

BEHR, M., HAREL, G., POST, T. & LESH, R. Rational number, ratio and proportion. Em D. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. NY: Macmillan, p. 296-333, 1992.

BROCARD, J., SERRAZINA, L., ROCHA, I., MENDES, F., MENINO, H, & FERREIRA, E. Um projecto centrado no desenvolvimento do sentido do número. Em R. Gonzalez, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machin & L. J. Blanco Nieto (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XII**. Badajoz: SEIEM, SPCE e APM, p. 495-504, 2008.

CARVALHO, A. **O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade**. Tese de Mestrado. Lisboa: APM, 2005.

FERREIRA, E. **O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade**. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2012.

FUSON, K. C. Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: Macmillan, p. 243- 275, 1992.

GONÇALVES, A. **Desenvolvimento do sentido do número num contexto de reso-lução de problemas no 1.º ciclo do ensino básico**. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2008.

GONÇALVES, H. **A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico**. Tese de Mestrado. Lisboa: APM, 2003.

GREENO, J. G. Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. **Journal for Research in Mathematics Education**, 22(3), 170-218. 1991.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. In D. C. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: Macmillan, p. 276- 294, 1992.

HOPE, J. Promoting number sense in school. **Arithmetic Teacher**, 36(6), 12-16.1989.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Em L. Hiebert & M. Behr (Eds.), **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, Va: NCTM, p. 162- 181, 1988.

MACIEIRA, S. **Diferentes significados de fração e a sua influência na aprendizagem dos racionais**. Tese de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, ESELx, 2011.

MAMEDE, E. **The effects of situations on children's understanding of fractions**. Tese de doutoramento. Universidade de Oxford Brookes, UK, 2007.

MARKOVITS, Z. & SOWDER, J. T. Developing number sense: An intervention study in grade 7. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25(1), 4-29, 1994.

MARTINS, F. M. M. **As fracções no desenvolvimento do sentido de número racional no 1.º ciclo**. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2007.

ME **Programa de Matemática do Ensino Básico**. <http://www.dgidec.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71>, em 10/09/2012, Lisboa, 2007.

MENDES, M. F. **A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo**. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2012.

MORAIS, C. **O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade**. Tese de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, ESELx., 2011.

TREFFERS, A. & BUYS, K – Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), **Children Learn Mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute, 2001.

VAROL, F. & FARRAN, D. Elementary school students' mental computation proficiencies. **Early Childhood Education Journal**, **35**(1), p. 89-94, 2007.

YANG, D. C. Developing number sense. **APMC**, **6**(3), p. 20-24, 2001.

YANG, D. C. Teaching and learning number sense – an intervention study of fifth grade students in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, **1**(1), p. 115-134, 2003.

Submetido em outubro de 2012
Aprovado em novembro de 2012