Como os professores avaliam as argumentações e provas matemáticas de alunos da escola básica?

Carlos Augusto Aguilar Júnior
Universidade Federal Fluminense - UFF
carlosaugustobolivar@hotmail.com

Resumo
Este artigo relata pesquisa brasileira realizada no campo da argumentação e prova na Educação Matemática, que se deu em duas fases, à semelhança da pesquisa de Hoyles (1997): em um primeiro momento, mapeamos, por Balacheff (1988), os tipos de argumentação e prova que os alunos do ensino fundamental apresentaram frente a problemas de aritmética e geometria; em um segundo momento, após análise e tabulação destes resultados, foi montado um questionário no qual o professor deveria avaliar as respostas selecionadas dos discentes aos problemas apresentados. Dessa forma, a pesquisa consistiu em avaliar as concepções de 59 professores de Matemática de Ensino Básico em relação à argumentação e prova apresentadas pelos alunos. O levantamento mostrou que a grande maioria dos professores opta e avalia melhor respostas que apresentam um maior rigor técnico, como requer a Matemática, o que é relevante do ponto de vista da formação e das concepções/saberes do professor e preparo para a sala de aula. Por outro lado, houve respostas bastante consistentes e convincentes dos alunos, mas que fogem aos padrões de rigor, que não foram tão bem avaliadas pelos professores, levando-nos a inferir que parte considerável desses professores não valorizam o raciocínio do aluno.

Palavras-chave: Argumentação. Prova e Demonstração Matemática. Formação docente. Concepções de Professores.

How do teachers evaluate the arguments and mathematical proofs of elementary school students?

Abstract
This paper reports Brazilian research in the field of argumentation and proof in Mathematics Education, carried out in two phases, similar to Hoyles' (1997) research: in a first moment, we map, by Balacheff (1988), the types of argumentation and proof that elementary school students presented with problems of arithmetic and geometry; in a second moment, after analyzing and tabulating these results, a questionnaire was set up where the teacher should evaluate the selected answers of the students to the problems presented. Thus, the research consisted of evaluating the conceptions of 59 teachers of Mathematics of Basic Education in relation to the argument and proof presented by the students. The survey showed that the great majority of teachers opt for and better

evaluate answers that present a greater technical rigor, as required by Mathematics, which is relevant from the point of view of teacher formation and conceptions / knowledge and preparation for the classroom. On the other hand, there were very consistent and convincing answers from thestudents, but they escaped rigorous standards, which were not so well evaluated by the teachers, leading us to infer that a considerable number of these teachers do not value the student's reasoning

Keywords: Argumentation. Proof and Math' Demonstration. Teacher formation. Teachers Conceptions.

Introdução

Tem sido bastante debatido no âmbito da Educação Matemática, tanto no Brasil quanto ao redor do mundo, o tema da argumentação e da prova matemática e sua aplicação/ensino em sala de aula da Escola Básica e sua importância para a formação do raciocínio lógico-matemático do estudante.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997, p. 15) – indicam caminhos para a formulação de um currículo de Matemática que permita desenvolver o saber matemático dos estudantes, ao postular que a Matemática

> permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Conforme se depreende dos PCN (BRASIL, 1997, p. 26), um dos objetivos da aprendizagem da Matemática no ensino fundamental é o desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e prova, com vistas, também, à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. Para tanto, o ensino de Matemática deve apoiar-se em estratégias e abordagens que explorem o raciocínio lógico-dedutivo.

Constata-se que, em geral, o conhecimento matemático dos alunos se restringe ao domínio de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que estão fazendo. Este pensamento é revelado por Ferreira (2006), Gouvea (1997) e Almeida (2007). No âmbito do relato de sua pesquisa de mestrado, ao discorrer sobre sua experiência docente, tanto em nível básico quanto superior, Almeida (2007, p. 14) destaca "[...] a aguda deficiência, evidenciada por parcela considerável da população estudantil, no trato de questões matemáticas mais elaboradas no que concerne à profundidade do raciocínio lógico-dedutivo exigida para o encaminhamento das questões".

Compartilhamos desta preocupação. É realmente frustrante para o estudante, que é estimulado apenas a realizar contas e aplicar fórmulas, perceber que não apresenta em seu desenvolvimento intelectual o domínio do raciocínio matemático. Quando o aluno é desafiado a resolver situações que demandem o uso de raciocínios mais elaborados e não apenas resultados prontos, este se percebe incapaz, mesmo quando apresenta em sua vida acadêmica histórico de bons resultados. Tal situação pode acarretar, como narrado por Almeida (2007, p. 2), "o esmorecimento e o consequente distanciamento dos estudos como também [...] verdadeiras situações de pânico e repulsa pela disciplina".

A admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da "validade formal de provas", do valor de uma argumentação/prova dada a um determinado resultado. Hanna (1990) cita a reavaliação realizada por matemáticos e professores de Matemática ocorrida nas décadas de 1970 e 1980 quanto ao papel das estruturas axiomáticas e das provas formais. Segundo a autora, "neste novo olhar, as provas passam a ter diferentes graus de validade formal, mantendo mesmo grau de aceitação, permitindo com isso a reconsideração do que poderia ser prova ideal e de que se deveria ensinar nas escolas" (HANNA, 1990, p. 8).

Ainda de acordo com Hanna (1990), dependendo do nível de aprendizagem do aluno, o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para se comprovar uma declaração matemática não deve necessariamente seguir os padrões de rigidez defendidos na Academia. Desse modo, percebe-se que muitos educadores matemáticos já assumem uma postura de afastamento quanto à exigência ou dependência extrema de provas rigorosas em Matemática, dando ênfase na concepção de prova como argumento convincente.

Queremos com este trabalho entender como se dá a compreensão e a aceitação dos professores quanto às argumentações e provas apresentadas pelos alunos. A discussão deste trabalho se desenvolve, além desta introdução, em outras cinco seções. Na seção 2 apresentamos os referenciais teóricos e metodológicos que possibilitam refletir sobre a questão da argumentação e prova matemática na escola básica. A seção seguinte se destina a apresentação e discussão da metodologia adotada para a abordagem do problema de pesquisa, que se baseou na técnica da aplicação de formulários a amostras de alunos (fase 1) e docentes (fase 2) da escola básica. Nas seções 4 e 5 discutimos, respectivamente, os dados coletados juntos aos alunos e aos professores e procedemos uma análise dessas respostas a partir do referencial teórico de Balacheff (1988) e Sower e Harel (1998), em relação à categorização das provas encontradas pelos alunos e avaliadas pelos professores. A última seção se reservou para apresentar as conclusões a que chegamos na pesquisa realizada.

Referencial teórico-metodológico utilizado na pesquisa

O levantamento bibliográfico realizado nos levou à reflexão sobre questões relativas aos saberes docentes que devem estar presentes em um processo didático estimulador do raciocínio lógico-dedutivo, especificamente quanto à argumentação e justificação em provas matemáticas.

As pesquisas realizadas por Hanna (1990, 1995), Knuth (2002), Healy, Jahn e Pitta Coelho (2007) e Jones (1997) nos ensinam que, ao se debruçar sobre a questão do ensino-aprendizagem de prova matemática, o pesquisador deve voltar o olhar para o trabalho didático-pedagógico do professor em relação à prova matemática, além de se voltar para o estudo da formação acadêmica do professor, levantando informações que possibilitem obter uma visão deste processo formador.

O trabalho de Healy et al. (2007) traz um panorama teórico, citando pesquisas internacionais, revelando as concepções de alunos sobre a prova, como fazem, por exemplo, Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988). Para compreender as avaliações que os alunos realizaram na primeira etapa da pesquisa, apoiamo-nos na pesquisa de Balacheff (1988).

Balacheff (1988) desenvolveu uma pesquisa com estudantes da França, em que identificou dois tipos básicos de prova: o tipo *pragmático* e o tipo *conceitual*. Para Balacheff (1988, pág. 217), prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de "recursos de ação", enquanto a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas. Para delinear melhor sua pesquisa, Balacheff (1988) destaca quatro modalidades de prova: *empirismo natural* (naive empiricism), *experimento crucial* (crucial experiment), *exemplo genérico* (generic example), e *experimento mental* (thought experiment). Estes quatro desdobramentos se originam dos movimentos existentes entre os tipos de prova: o empirismo natural e o experimento crucial repousam na seara da prova pragmática, e o experimento mental reside no campo da prova conceitual. Já o exemplo genérico transita entre os dois tipos, dado que o exemplo genérico "consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo fazendo uso de um representante particular" (GRAVINA, 2001, p. 67).

Nosso levantamento encontrou várias pesquisas desenvolvidas ao redor do mundo, nas quais o objetivo em comum foi o de mapear as habilidades de prova dos alunos (CSÍKOS, 1999; MIYAKAWA, 2002; FURINGUETTI; PAOLA, 1997). De modo geral, estas pesquisas se apoiaram nos esquemas de prova de Sowder e Harel (1998) ou nos tipos de prova postulados por Balacheff (1988).

Csíkos (1999) e Miyakawa (2002) relatam em seus respectivos estudos investigações realizadas com estudantes de Hungria e França, dos ensinos fundamental e médio, estabelecendo uma relação entre a habilidade de argumentar e provar em Matemática com o desempenho na disciplina, além do domínio do assunto. Csíkos (1999) conclui que existe uma relação entre o bom desempenho escolar em Matemática e a habilidade de prova dos alunos, e Mayakawa (2002) conseguiu identificar por meio dos ensinamentos de Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988) as concepções de prova matemática destes alunos e correlacioná-las com o seu conhecimento matemático, pois verifica que "a dificuldade de construção da prova matemática não é devida apenas à competência algébrica ou à concepção sobre prova, mas também ao conhecimento matemático" (MIYAKAWA, 2002, p. 353).

Já Furinghetti e Paola (1997) registram em seu artigo uma ideia semelhante à contida em Miyakawa (2002), ao chamar de *efeito de sombra algébrica ou aritmética* a relação entre os conceitos em Matemática com as concepções de prova dos alunos, pois os autores constatam que as dificuldades com a álgebra e com a aritmética produzem uma blindagem, impedindo a construção de argumentos e justificações pelos alunos.

Em Boavida (2005), vemos a preocupação com o desenvolvimento da habilidade de argumentação e justificação em Matemática, importante para o educando aprender a raciocinar lógica e dedutivamente. Ela defende o encorajamento dos alunos, levando-os a se defrontarem com este tipo de atividade, apesar da reconhecida dificuldade e complexidade desta postura didático-pedagógica, mas destaca a necessidade de uma postura metodológica que crie a "cultura de argumentação".

Holyes (1997) em sua pesquisa também procura identificar, por intermédio da aplicação de formulários contendo questões com prova matemática, os níveis de argumentação, a existência de concepções de prova de alunos britânicos. Em seu levantamento, que se deu em duas etapas, a pesquisadora indagava dos participantes suas concepções sobre "prova matemática", buscando verificar se as competências elencadas no currículo britânico com respeito à prova se faziam presentes na formação acadêmica dos alunos, além de constatar, junto aos professores, suas próprias concepções de prova matemática e como se dava o seu processo de ensino-aprendizagem.

A forma de se demonstrar na academia, mediante rigoroso método dedutivo, não estabelece diálogo com a Escola Básica, lugar onde irá atuar o professor. Desse modo, Knuth (2002) afirma que, ao se avaliar as concepções de prova dos professores, deve-se levar em conta o currículo e o nível de ensino do curso. Em seu trabalho, o autor relata estudo realizado com 17 professores atuantes no ensino médio, nos Estados Unidos. Na visão desses professores, a reforma curricular daquele país, que previa o ensino-aprendizagem de prova matemática para todos os alunos da rede de ensino, não seria uma tarefa simples de ser implementada. Os resultados de sua intervenção junto a estes indivíduos sugerem, ainda, que a visão do tema "prova matemática" é a de um assunto/matéria da grade curricular a ser ensinado, e não como uma forma de comunicar e estudar Matemática.

Modelo metodológico aplicado

Esta pesquisa adotou uma metodologia de caráter qualitativo, através da análise de dados coletados a partir de formulários respondidos por professores. Neste sentido, esta investigação se inspira nos trabalhos desenvolvidos por Hoyles (1997) e também pelo Projeto de Pesquisa AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), com professores de Ensino Básico. Era objetivo desse projeto a exploração de situações didáticas que possibilitassem construir a habilidade de argumentação e prova matemática dos alunos. Alguns dos numerosos trabalhos desenvolvidos no âmbito do Projeto AprovaME são: Pietropaolo (2005), Grinkraut (2009), Gouvêa (1998), Almeida (2007) e Ferreira (2008).

Foram aplicadas questões/problemas acompanhados das argumentações e provas de alunos, em que o professor participante deveria emitir uma avaliação a respeito das respostas discentes dadas. Esta metodologia de trabalho – construção do formulário com respostas dadas por alunos – foi inspirada na pesquisa realizada por Hoyles (1997). Em seu estudo, a pesquisadora britânica procurou investigar na formação escolar dos alunos do Reino Unido a presença dos elementos constantes do Currículo, especificamente em relação ao ensino-aprendizagem de prova matemática.

A coleta de dados consistiu na aplicação de um formulário a 59 professores, sendo 33 do Rio de Janeiro – alunos da Especialização em Educação Matemática e dos Mestrados Acadêmico e Profissional (PROFMAT), todos em realização na UFRJ – e 26 professores que participaram de oficina ministrada no âmbito do 3º SIPEMAT – 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – realizado em Fortaleza-CE, entre os dias 26 e 29 de junho de 2012.

Coleta e análise de dados da primeira fase: tipos de argumentação e prova matemática dos alunos

Para montarmos um dos nossos mais importantes instrumentos de investigação, que é o formulário a ser aplicado aos docentes, era importante que este apresentasse respostas "reais", verdadeiramente dadas por alunos do ensino básico.

Foi, então, elaborada uma atividade com o objetivo de levantar respostas que apresentassem as justificações e as argumentações dos alunos. Essa atividade foi aplicada durante o mês de novembro de 2011 a 121 alunos de duas escolas municipais (que chamaremos de EM1 e EM2) e uma escola federal (que rotularemos por EF1). A amostra é composta de 3 turmas de 9º ano e apenas uma turma de 8º ano. A aplicação contou com a colaboração de professores-aplicadores, regentes das próprias turmas.

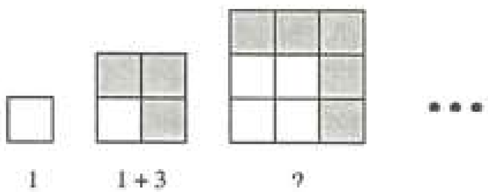
O instrumento é composto de cinco questões dissertativas que abrangem tópicos relacionados à aritmética de números inteiros, sequências numéricas e identificação de padrões geométrico e numérico, além de geometria plana. A primeira questão trata de uma propriedade aritmética de números naturais; a segunda questão trabalha com sequência numérica e geométrica, e a busca e generalização de um padrão (numérico e/ou geométrico); a terceira e quarta questões exploram propriedades e resultados (teoremas e proposições) da geometria plana; e a quinta questão aborda uma situação-problema em geometria, buscando a generalização a partir de padrões numéricos e de relações entre quantidades (de pontos e triângulos).

Em nossa metodologia utilizamos uma análise qualitativa dos dados coletados, categorizando-os segundo os tipos de prova encontrados nos trabalhos Balacheff (1988). Nesta análise, investigamos o nível de maturidade matemática de suas respostas, que serão posteriormente, na segunda fase de nossa investigação, colocadas sob a avaliação de professores, que julgaram as respostas destes mesmos discentes. A fim de que sejam preservadas as identidades dos alunos, utilizamos siglas no lugar de seus nomes.

Em uma primeira análise, observando somente as questões que foram ou não respondidas, pudemos perceber que as questões 2 e 5 não apresentaram um número considerável de respostas. A questão 2 (Figura 1) é composta de cinco itens e a questão 5 (Figura 2), de três itens. Os últimos itens de cada questão investigavam a formação de padrões e pediam que o aluno exibisse expressões algébricas que generalizassem estes padrões. Talvez esse tenha sido a principal causa das dificuldades.

Figura 1 – Enunciado da questão 2

2) Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Como será a figura seguinte? Faça um desenho.

b) Escreva **o número de quadradinhos da figura** que você desenhou <u>como a soma dos brancos com os escuros</u>.

c) Qual a forma de cada figura da sequência? Represente cada uma em função do número de quadradinhos de cada um de seus lados.

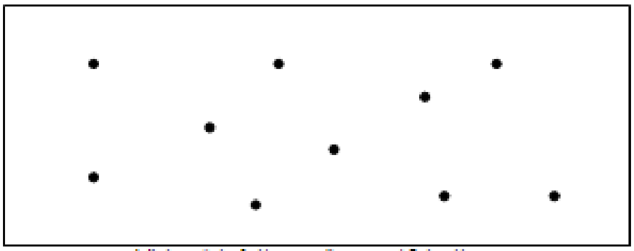
d) Quanto vale a soma dos 10 primeiros números ímpares?

e) Escreva uma expressão para a soma dos n primeiros números ímpares.

Fonte: Nasser (1989) – adaptada pelo autor

Figura 2 – Enunciado da questão 5

5) Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituosa, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com 2 vértices do retângulo.



Vidro "defeituoso" com 10 bolhas

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar ou com um dos cantos do vidro original.

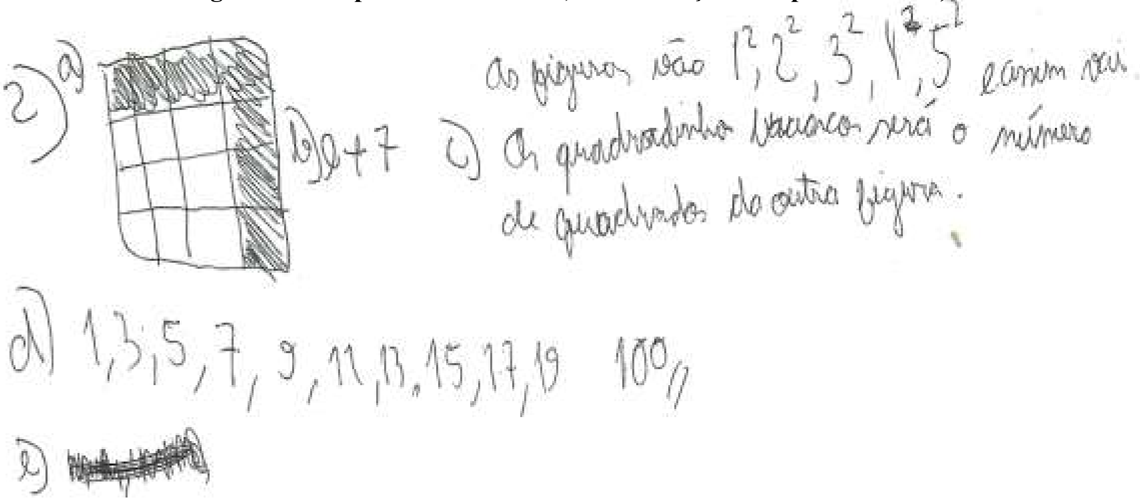
Com base nestas informações, resolva as questões seguintes, **justificando todas as respostas**:

a) Quantos pedaços triangulares de vidro são possíveis de se obter com este vidro defeituoso?
b) Se o vidro apresentasse 12 bolhas? E 20? Quantos pedaços triangulares serão obtidos em cada caso?
c) É possível estabelecer uma relação entre **o número de triângulos obtidos** com **o número de bolhas existentes**?

Fonte: Nasser (1989) – adaptada pelo autor

Houve algumas tímidas tentativas no sentido de mostrar uma expressão matemática em atendimento aos itens, mas também se verificaram algumas tentativas de redação por extenso de suas conclusões obtidas a partir de observações que, de algum modo, apoiaram-se intuitivamente em algum tipo de prova de Balacheff (1988).

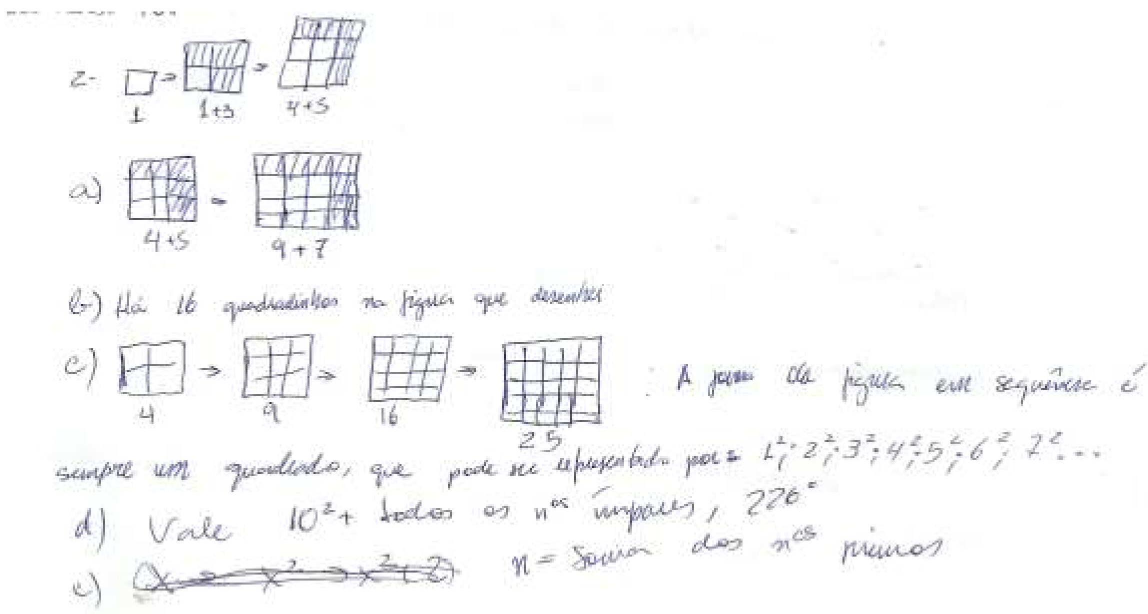
Figura 3[1]– Resposta do aluno LD, da instituição EF1 para o item c)



Fonte: dados da pesquisa de campo. (Legenda: "As figuras vão 12, 22, 32, 42, 52 e assim vai. Os quadradinhos brancos serão o número de quadrados da outra figura".)

[1] Extraído do formulário aplicado aos estudantes. As demais figuras presentes no artigo são de questões que foram aplicadas ou de respostas de alunos participantes da pesquisa.

Figura 4 – Resposta do aluno G, da instituição EF1 para o item c)



Fonte: dados da pesquisa de campo. (Legenda: "A forma da figura em sequência é sempre um quadrado, que pode ser representado por: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72 ... ".)

Nas duas respostas apresentadas, identificamos o uso do tipo de prova "empirismo natural" (ou empirismo ingênuo, como sugerem algumas traduções). Na figura 4, percebemos que o aluno LD não apresentou outros casos ou exemplos para concluir que as figuras seriam quadrados relacionados com o total de quadradinhos dado por 12, 22, 32, 42. Nas palavras do próprio LD, conclui afirmando "assim vai". Já o aluno G, também da EF1, estabeleceu sua argumentação a partir do esquema empírico, baseado em exemplos particulares (figura 5), remetendo ao "empirismo natural" de Balacheff (1988).

Este modelo é basicamente a tônica dos esquemas e tipos de prova que encontramos nas respostas de nossos alunos. A questão 1 pede que o aluno verifique se é falsa ou verdadeira, justificando a seguinte afirmação: "A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3".

Tabela 1 – Distribuição das respostas obtidas na questão 1.

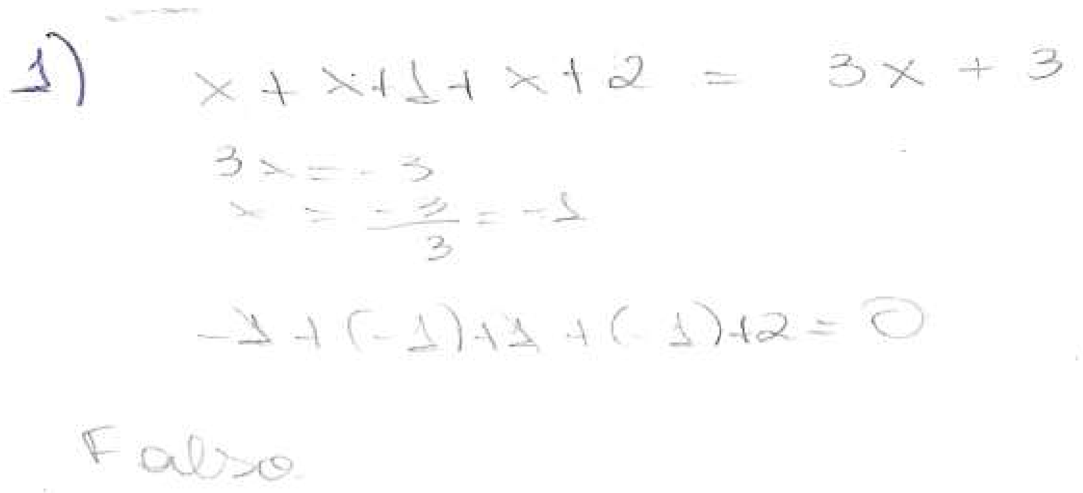
Série / Esquema de Prova (QUESTÃO 1)	Empirismo natural	Exemplo Genérico
8º ano do ensino fundamental	**29**	**2**
9º ano do ensino fundamental	**89**	**-**

Fonte: elaboração própria a partir dos dados levantados

Percebemos a influência que os exemplos exercem sobre exercícios de argumentação e prova dos alunos. Os exemplos sugerem certa autoridade e poder que possuem para comprovar a afirmação, a ideia jurídica de prova: elemento que comprova a veracidade do fato. Por exemplo, a aluna CS responde que a questão 1 é verdadeira, justificando que a verdade é obtida "por causa de vários exemplos".

Em Matemática, para se justificar formalmente resultados, teoremas e propriedades, sejam geométricas, algébricas ou aritméticas, são utilizadas letras para indicar um modelo geral válido para qualquer caso, com as mesmas propriedades e características. Porém, o aluno que executa um trabalho com álgebra limitado à resolução de equações e de expressões algébricas carrega consigo o pensamento de que, havendo uma expressão com letra, deve-se resolver uma equação "para achar o valor dessa letra". Este exemplo de situação se enquadra no esquema externo-ritual, que indica o uso de letras, seguindo um ritual de manipulação de expressões algébricas, conforme se depreende de Sowder e Harel (1998). A resposta a seguir ilustra esta ideia.

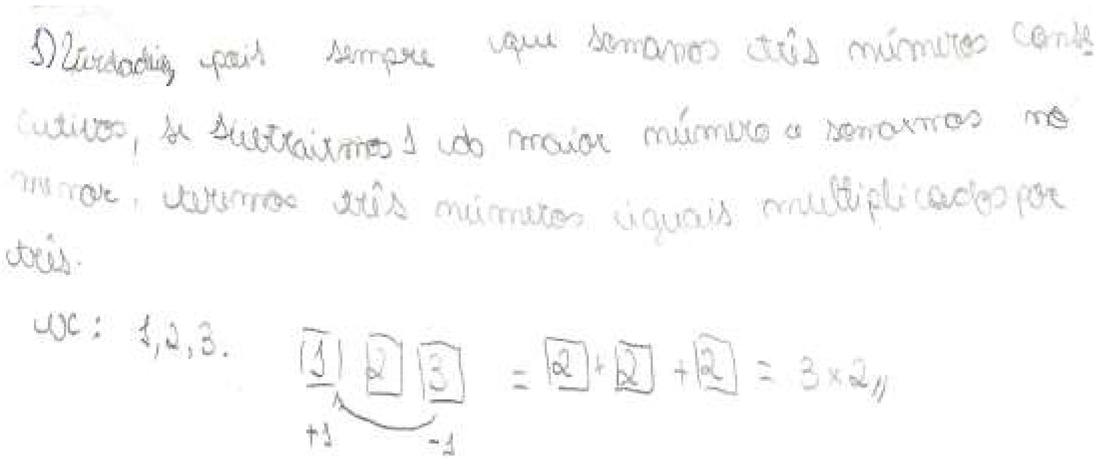
Figura 5 – Resposta à questão 1 do aluno CM.



Fonte: dados da pesquisa de campo.

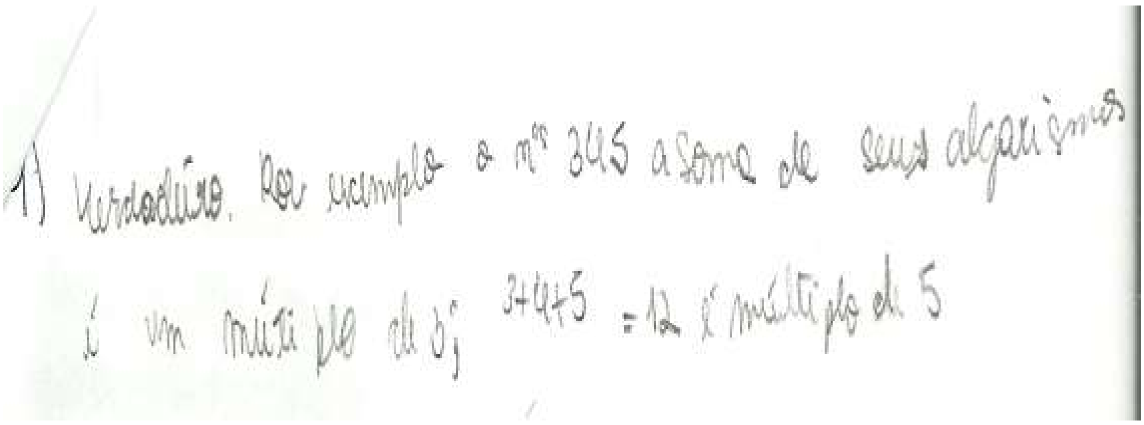
Foram também apresentadas respostas interessantes do ponto de vista da prova e argumentação matemática, uma vez que os alunos tentaram justificar transcrevendo suas ideias por meio das palavras. Não obtivemos argumentos gráficos, como aqueles encontrados por Hoyles (1997), em que os alunos se utilizaram de símbolos gráficos (bolinhas, quadradinhos, etc.) para representar concreta e visualmente as quantidades e operar com estes símbolos. Ainda em relação à questão 1, dois alunos do colégio EF1 apresentam um raciocínio lógico bastante elaborado, considerando a faixa etária destes estudantes (15 anos de idade). Apesar de sua argumentação partir de um exemplo particular, remetendo ao esquema empírico, os alunos utilizaram esse exemplo particular para estruturar comentários gerais, tentando exibir, desta forma, um padrão a partir dele.

Figura 6 – Resposta da aluna ALM, do EF1, à questão 1



Fonte: dados da pesquisa de campo. (Legenda: “verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três”.

Figura 7 – Resposta da aluna GSM, do EF1, à questão 1



Fonte: dados da pesquisa de campo. (Legenda: “verdadeira, por exemplo o nº 345 a soma de seus algarismos é um múltiplo de três; 3+4+5 = 12 é múltiplo de 3.”[2])

Nestes dois exemplos, observa-se o esforço das alunas em de fato provar um resultado matemático, isto é, buscar argumentos convincentes de validade, de modo a garantir a veracidade da propriedade em questão em qualquer caso. As respostas encontradas partem de um exemplo especial, que promove a generalização para os demais casos similares: para Balacheff (1988), este tipo de prova apresentado se enquadraria no *exemplo genérico*, uma vez que a escolha do exemplo atende de maneira geral o enunciado do problema.

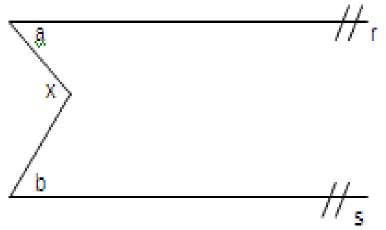
Na resposta da aluna ALM, verifica-se que ela observou um padrão na soma de três números inteiros consecutivos: se subtrairmos uma unidade do maior número e somar ao menor, obtêm-se três números iguais, cuja soma será igual ao produto do termo do meio e três. Apesar de ela não ter usado qualquer artifício algébrico, seus argumentos robustecem a veracidade e o uso do exemplo aplica-se para mostrar a validade dos argumentos lançados. Ressalta-se também que, ao lançar os argumentos, a aluna propôs uma conjectura ou lema: “sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais”. Este exercício, de propor a construção, avaliação e refutação de conjecturas, é bastante interessante ao desenvolvimento do raciocínio lógico-detutivo, além de formar no aluno uma postura investigativa, atitudes estas amplamente recomendadas pelos PCN (BRASIL, 1997).

Quanto à resposta da aluna GSM, causa-nos satisfação a utilização de resultados previamente “conhecidos” (provados) para demonstrar os demais. Sua resposta sugere a utilização da propriedade referente aos múltiplos de 3 (critério de divisibilidade do número 3), que consiste em verificar se a soma dos algarismos que compõem o número é ou não divisível por 3 (se a soma dos algarismos resultar um múltiplo de 3, então o número em questão é divisível por 3). Na sua argumentação, pareceu-nos que a aluna exibiu como exemplo o número 345, formado por algarismos consecutivos e concluiu, com base na propriedade citada, que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três.

A questão número 3 também gerou resultados importantes para a pesquisa. Trata-se de um problema de geometria plana que consistia em mostrar que o ângulo x media a soma dos ângulos a e b. É importante ressaltar que não foi indicado que a resposta do problema era x = a + b. Cabia ao aluno chegar a este resultado, justificando seu raciocínio.

Figura 8 – Enunciado da questão 3

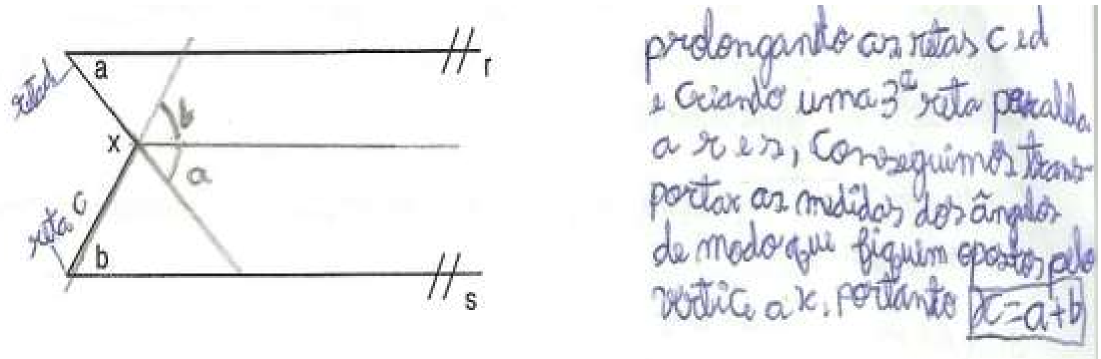
3) Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:



Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a e b, justificando sua resposta**.

Fonte: extraído do formulário aplicado aos estudantes.

Figura 9 – Resposta dada pelo aluno LT, da EM1

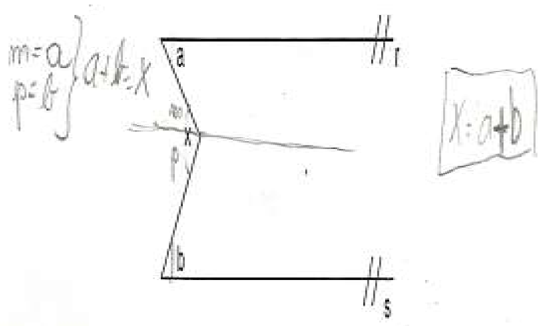


Fonte: dados da pesquisa de campo. (Legenda: : “prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transpor as medidas dos ângulos, e modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portanto x = a+b.”)

Em seus argumentos, o aluno LT descreve as construções auxiliares para ter condições de utilizar o fato matemático de que os ângulos opostos pelo vértice são iguais. Implicitamente o aluno utiliza o postulado das paralelas, para traçar a terceira reta paralela e utiliza também o Teorema das Paralelas para realizar a "transposição" mencionada na argumentação. Além de se apresentar de forma correta, esta argumentação mostra que o aluno empreende bem seu raciocínio, moldando-se em uma estrutura lógico-dedutiva, residindo este tipo de prova também no modelo de *experimento mental* (BALACHEFF, 1988).

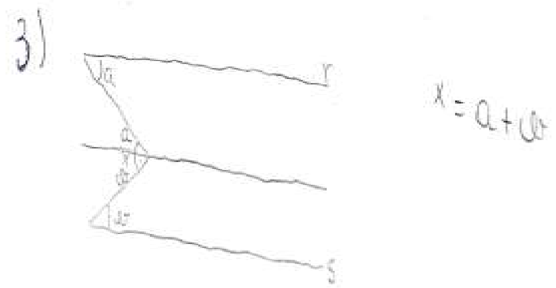
Em outras respostas, alguns alunos, como PSR, da EM1, concluíram corretamente que x = a + b, mas sem apresentar maiores detalhes escritos quanto à justificação e à argumentação do fato questionado.

Figura 10 – Resposta dada pela aluna PSR



Fonte: dados da pesquisa de campo.

Figura 11 – Resposta dada pela aluna AL.



Fonte: dados da pesquisa de campo.

Nestas resoluções, ambas as alunas responderam, corretamente, que x = a + b, mas não deram uma justificativa mais elaborada que corrobore a validade de que x seja de fato a + b. Notemos que nas figuras 11 e 12 as alunas construíram o que seria uma reta paralela às retas r e s, para então aplicar o teorema das paralelas. Estas duas soluções refletem o trabalho em sala de aula que valoriza apenas o resultado final, sem explorar a coleta de premissas para construir argumentos e chegar às conclusões. Neste caso, entendemos que as duas alunas não "provaram" o resultado, pois apenas exibiram uma resposta, que por acaso é a correta para o problema. De acordo com Nasser e Tinoco (2003, p. 84), estas alunas apresentaram uma resposta, que para alguns pode até ser encarada como um argumento – tendo em vista o traçado da reta paralela auxiliar – mas não podemos considerá-la como uma prova, do ponto de vista da Matemática.

A resposta apresentada na figura 13 ilustra a ideia de que um trabalho com álgebra limitado à resolução de equações leva o aluno à crença de que sempre deve "achar o valor da letra". Esta situação se enquadra no esquema externo-ritual, de Sowder e Harel (1998).

Figura 12 – Resposta da aluna TM

$$X = a + B$$
$$X + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$
$$X = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ$$
$$\boxed{X = 60^\circ}$$

Fonte: dados da pesquisa de campo.

Após a análise deste teste, pudemos estabelecer algumas considerações importantes para a sequência da pesquisa. Grande parte das respostas apresentadas se concentra no esquema de prova baseada em exemplos, o que nos permite tecer algumas indagações a respeito da prática docente: será que o professor, ao apresentar um teorema ou uma proposição, faz sua "demonstração" propondo uma série de exercícios que atendem à verdade matemática colocada ou se baseia apenas em exemplos para concluir uma afirmativa? Ou será que o professor propõe um exercício de argumentação que se inicia na experimentação, na verificação de exemplos e parte para a estruturação de justificativas que, muitas vezes, são percebidas destes experimentos e exemplos? Ou ainda, será que o professor prova os teoremas utilizando-se do rigor matemático, redigindo a demonstração como se estivesse em um curso acadêmico? Vimos em Imenes (1987) que existe uma renúncia tácita ao trabalho de sala de aula com a prova matemática. Contudo, as sugestões de atividades encontradas em seu trabalho apontam para a construção da habilidade de argumentar em Matemática.

Descrição dos formulários

Nosso formulário se estrutura em quatro páginas. Na primeira, o docente se identifica, relata sua experiência docente nas redes pública e privada, além de cursos de qualificação profissional, e responde, de forma livre, a pergunta: "Como você definiria uma 'prova matemática'?" Ainda na primeira página do formulário de coleta de dados há uma tabela, que deve ser preenchida segundo uma escala. Nela, pedimos que o professor registre suas impressões sobre a sua própria formação, em termos de prova matemática, e sobre sua prática docente ligada ao ensino-aprendizagem deste assunto.

Para a segunda parte do formulário, foram coletadas respostas de alunos de 8º e 9º anos a problemas que exigiam raciocínio dedutivo e justificativas. As três últimas páginas do formulário trazem cinco dessas resoluções a cada um dos dois exercícios propostos. Estas respostas são tratadas em Aguilar Junior e Nasser (2012).

A seguir, apresentamos estas questões:

Figura 13 – Questão do formulário dos professores, com respostas de alunos

1) **"Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta: "<u>A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3</u>".**

Fonte: extraído do questionário aplicado aos professores.

Figura 14 – Questão do formulário dos professores, com respostas de alunos

2) "Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:

Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b, justificando sua resposta**."

Fonte: extraído do questionário aplicado aos professores.

Junto a estas perguntas, apresentamos as respostas dadas por cinco alunos do Ensino Básico a cada umas delas. O objetivo consistiu em o professor analisar as respostas dos alunos às duas questões postas e responder aos seguintes questionamentos:

a) <u>Atribua uma nota</u> (de zero a dez) a **cada uma das respostas** acima. Justifique suas notas A qual destas respostas você daria a maior nota? Por quê?
b) Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?

Nas seções seguintes, iremos apresentar a análise das avaliações das questões 1 e 2, tabulando as notas dadas, as justificativas a cada nota e a escolha da resposta discente (item b do questionário).

Análise das respostas dadas ao problema 1

O problema número 1, como já citado anteriormente, pedia que o aluno mostrasse se era verdadeiro ou falso o fato de a soma de três números consecutivos resultar em um múltiplo de três. Foram apresentadas cinco respostas de alunos obtidas na primeira fase de desenvolvimento desta pesquisa. A seguir mostramos as respostas dos alunos que constaram do formulário.

Figura 15 – Respostas dos alunos ao problema 1

Renata (14 anos): "Verdadeira, pois podemos representar 3 números consecutivos por x, 2x e 3x. Somando esses números, obtemos:
$x + 2x + 3x = 6x$, que é múltiplo de 3."

Talita (16 anos): "Verdadeira. Podemos representar três números consecutivos por: x, x+1 e x+2, com $x \in IN$. Somando esses números, obtemos:
$x + x+1 + x+2 = 3x+3 = 3(x+1)$, que é múltiplo de 3."

Marcos (17 anos): "Falsa, pois a soma de três números consecutivos pode ser ímpar, e nem todos os números ímpares são múltiplos de 3."

Estevan (14 anos): "Verdadeira, pois não importa o número que escolhermos, se o somarmos com nºs consecutivos o resultado é sempre múltiplo de 3

$1 + 2 + 3 = 6$	$5 + 6 + 7 = 18$
$2 + 3 + 4 = 9$	$6 + 7 + 8 = 21$
$3 + 4 + 5 = 12$	...
$4 + 5 + 6 = 15$	$235 + 236 + 237 = 708$"

Marcela (14 anos): "Verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três
Ex.: 1, 2, 3

$\underset{+1}{\boxed{1}}\ \boxed{2}\ \underset{-1}{\boxed{3}} = \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{2} = 3 . 2$

Fonte: extraído do questionário aplicado aos professores.

No mapeamento das respostas que os professores deram ao item b do questionário, verificamos que todos os professores escolheram a resposta da aluna Talita, mas houve indicações para outras respostas: 13 professores afirmaram que também responderiam como Estevan e 10, como Marcela.

Verifica-se, também, que nenhum dos professores indicou a resposta da Renata ou do Marcos. Mas destacamos que a não escolha das respostas da Renata ou do Marcos não significa que todos atribuíram nota zero para estas respostas. Veremos mais à frente que alguns professores avaliaram as respostas levando em consideração a iniciativa de representação algébrica, por parte da resposta da Renata, e do argumento de Marcos, que está correto, se avaliado isoladamente do contexto de sua resposta ao problema 1, uma vez que a soma de três números consecutivos resultarem um número ímpar (Marcos afirmou que a afirmação era falsa, o que não está correto).

Do total dos professores que optaram por escolher a resposta da Tatila, destacam-se 17 participantes que optaram por mais de uma resposta discente: seis responderam que escolheriam as respostas de Talita, Estevan e Marcela; sete escolheriam as de Talita e Estevan; e quatro, as de Talita e Marcela. Sobre estas respostas, iremos fazer alguns comentários e discussões.

A escolha da Talita foi defendida por boa parte dos professores por que era a resposta mais técnica, próxima do "rigor matemático" defendido e praticado na Academia.

Passemos, a seguir, para a análise das notas relativas ao item a do problema 1. Comentaremos as notas e respostas apresentadas pelos professores. A tabela que segue mostra o comportamento das notas em termos de média, desvio padrão e moda.

Tabela 2 – Média, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 1).

	RENATA	TALITA	ESTEVAN	MARCELA	MARCOS
MÉDIA	3,8	9,8	6,6	8,3	1,1
MODA	5,0	10,0	5,0	10,0	0,0
VARIÂNCIA	6,7	0,2	6,4	4,3	2,6
DESVIO PADRÃO	2,6	0,4	2,5	2,1	1,6

Fonte: elaboração própria a partir dos dados levantados

As respostas dadas pelos alunos Renata e Marcos estavam incorretas (figura 3). Mesmo assim, devido às variadas concepções que os professores trazem consigo a respeito de avaliação e de prova matemática, percebemos grande variação nas notas atribuídas a estes dois alunos. Verificamos na tabela acima, através da medida de variância, o afastamento que a média apresentou em relação às notas atribuídas aos alunos Renata e Marcos. Especialmente sobre a aluna Renata, a variância de suas notas é 6,7, o que indica uma grande variedade de notas dadas à sua resposta.

Pela tabela acima, apesar de a moda das notas atribuídas ao aluno Marcos ser zero, a média das 59 notas aferidas é 1,1, com desvio de 1,6, o 2º menor verificado nesta série de dados. Esta variedade de notas nos indica os vários olhares docentes sobre a prova: alguns, mais exigentes, imbuídos do rigor matemático requerido pela Academia, indicaram nota zero, para os dois alunos; por outro lado, houve professores que atribuíram nota 10,0 à resposta de Renata.

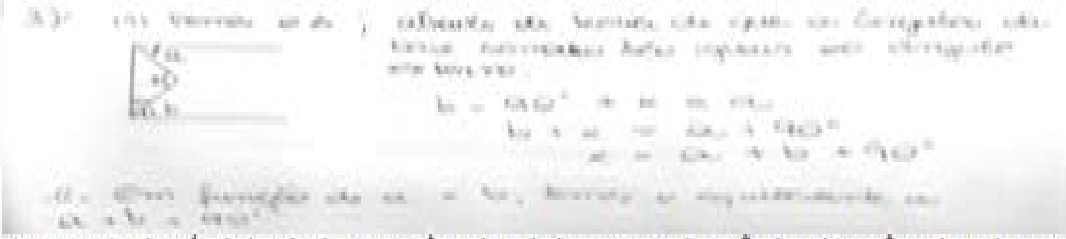
Análise das respostas dadas ao problema 2

O problema 2 era uma questão de Geometria, referente ao Teorema das Paralelas. No problema, o aluno deveria concluir que a medida do ângulo x era igual à soma das medidas dos ângulos a e b, apresentando argumentos que validassem este resultado. A estrutura dos itens (a e b) no problema 2 foi idêntica àquela apresentada no problema 1.

Antes de passarmos à análise das respostas dos participantes a este item, apresentamos as respostas selecionadas para avaliação dos professores participantes.

Figura 14 – Respostas dos alunos ao problema 2

Renata (14 anos):



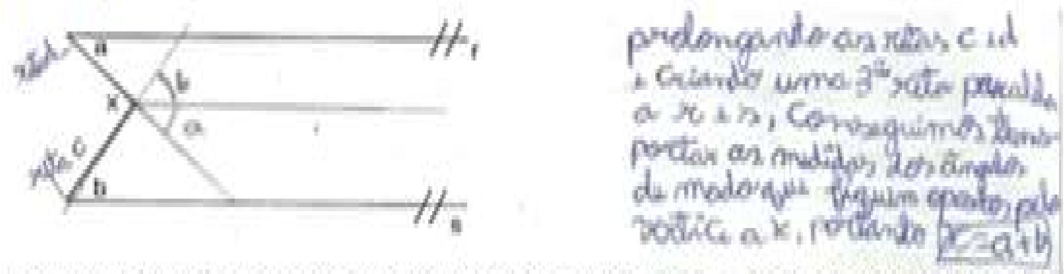
"temos o Δ; através da teoria de queos ângulos da base somados são iguais ao ângulo externo:

$b - 90º + x = a$

$b + x = a + 90º$

$x = a + b + 90º$ R: Em função de a e b, temos x equivalente a $a + b + 90º$."

Matheus (14 anos):

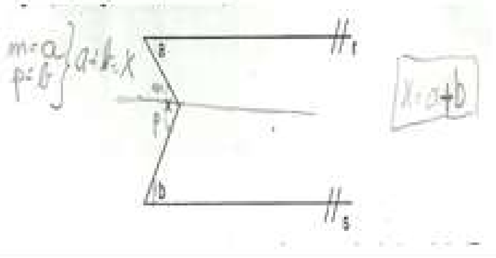


"prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transportar as medidas dos ângulos de modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portando $x = a + b$."

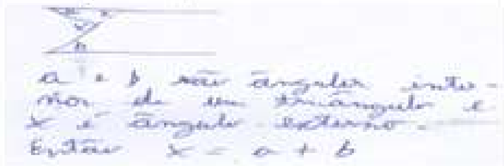
Pietra (14 anos):

"x é igual a "a", que é igual a "b": $a = x = b$. Eles são iguais por que são Angulos Opostos pelo Vértice."

Érica (15 anos):



Manoel (14 anos):



"a e b são ângulos internos de um triângulo e x é ângulo externo.

Então x = a + b"

Fonte: extraído do questionário aplicado aos professores

Verifica-se que nesta questão houve uma maior distribuição das escolhas do que no item b da questão 1. Ocorreu a predominância pela resposta de Matheus, tecnicamente válida e bem elaborada, com 36 dos 59 professores optando por esta resposta. Também houve outras escolhas: 3 para a da aluna Renata, 20 para aluna Erika e 17 para o aluno Manoel.

Como fizemos no item a do problema 1, novamente solicitamos que os participantes verbalizassem suas opiniões a respeito das respostas apresentadas pelos alunos. Mais uma vez os professores tiveram que dar uma nota, de zero a dez, a cada afirmação discente e justificar a nota atribuída. A seguir, montamos uma tabela com as médias, modas, desvios-padrões e variâncias das notas atribuídas para cada resposta.

Tabela 3 – Média, variância, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 2)

	RENATA	MATHEUS	PIETRA	ÉRICA	MANOEL
MÉDIA	2,0	9,8	1,3	8,3	8,1
MODA	0,0	10,0	0,0	10,0	10,0
VARIÂNCIA	5,6	0,5	4,9	5,4	9,3
DESVIO PADRÃO	2,4	0,7	2,2	2,3	3,0

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados coletados.

A tabela 3 nos mostra como se comportaram as notas que os participantes atribuíram às respostas dos alunos. Como já discutido anteriormente, as respostas que estão mais próximas de uma prova matemática são as respostas de Matheus, Érica e Manoel. Dessa forma, esperávamos que as notas atribuídas a estes três alunos fossem altas, próximo a dez. Apesar de a moda das notas destes três discentes ser 10,0, podemos perceber que não houve uma unanimidade na escolha desta nota: o desvio padrão das notas de Érica e Manoel foram de 2,3 e 3,0, respectivamente, indicando que houve uma considerável variação das notas atribuídas a estes estudantes.

Na coleta dos dados, que possibilitou a montagem desta tabela, podemos perceber a influência que a formação acadêmica exerce sobre as concepções dos professores: mais uma vez a variabilidade das notas reflete, de certa maneira, a diversidade de posturas que os professores assumem durante sua formação e sua atuação profissionais, o que gera as variadas opiniões sobre uma mesma questão educacional (no nosso caso, a prova matemática e sua avaliação).

Conclusões

Nos levantamentos realizados, ficou evidente, tanto na análise das respostas obtidas no problema 1 quanto no problema 2, que os professores possuem grande inclinação para as argumentações que se aproximaram da prova formal, como foi o caso das respostas dos alunos Talita (problema 1) e Matheus (problema 2). Apesar de outros alunos também terem empreendido argumentos convincentes e fortes, como foi o caso da aluna Marcela no problema 1 e do aluno Manoel no problema 2, a preferência pelos argumentos mais técnicos parece estar relacionada à influência da formação acadêmica (KNUTH, 2002, JONES, 1997, HANNA, 1990, 1995) pelo rigor na construção e encadeamento lógico dos argumentos.

A influência da Academia se reflete nas concepções dos professores, que indicam a preferência por argumentos e provas discentes que se aproximem do modelo axiomático-dedutivo ou formal. É importante que o professor saiba identificar uma prova matemática no seu sentido acadêmico, mas também é igualmente importante que o professor valorize as iniciativas de argumentação informal, como foi o caso das respostas de Marcela e Estevan (problema 1) e Manoel e Érika (problema 2).

Apesar de não termos um currículo nacional e estruturado, tendo em vista o que dispõe a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que contempla a influência das culturas regionais e das políticas locais para a elaboração dos seus currículos, temos como documento oficial os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), que não são impositivos, mas norteadores na construção de nossos sistemas curriculares. Neste documento, que deve ser criticado e aprimorado por nós, pesquisadores e educadores matemáticos, existem orientações que, no nosso entendimento, podem contribuir para o desenvolvimento das múltiplas competências matemáticas, inclusive a de argumentar e provar. Em uma perspectiva mais transdisciplinar, o desenvolvimento das competências matemáticas, principalmente a habilidade de argumentar e provar, é importante e fundamental para a formação do cidadão crítico, capaz de enxergar a realidade ao seu redor e interpretá-la criticamente, além de proporcionar o desenvolvimento das outras ciências, como a Física, Química e Engenharias.

Finalizamos destacando a importância deste estudo não só para o campo de pesquisa da Educação Matemática, mas também por permitir a divulgação dos aspectos da prova matemática depreendidos tanto na análise dos dados em si, como nas leituras realizadas.

Embora os 59 professores participantes desta intervenção tivessem demonstrado interesse pelo tema, seja pela simples cooperação em preencher os formulários, seja pela participação da oficina oferecida no III SIPEMAT, frisamos, mais uma vez, a importância de se dar atenção a este tema do ensino, que por vezes é negligenciado pelas instituições formadoras, como também por nós, professores.

Referências

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. **Revista Vydia**, vol 32, n. 2, p.133-147. Santa Maria (RS), Brasil, 2012.

ALMEIDA, J. C. P. **Argumentação e prova na matemática escolar do Ensino Básico:** A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil, 2007.

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils' pratice of school mathematics**. In: PIMM, D. (ed.), Mathematics, teachers and children, pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra.

BOAVIDA, A. M. R. A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In: AMRB: XVI SIEM, **Anais**... do AMRB: XVI SIEM, Lisboa, Portugal, 2005.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 88f. Secretaria de Ensino Fundamental – SEF/MEC – Brasília, Brasil, 1997.

CSIKOS, Csaba A.Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder proof-categorization. **Proceedings of PME-23**, v. 2, p. 233-240, Haifa, Israel, 1999.

FURINGHETTI, F.; PAOLA, D. Shadows on Proof. **PME**, v. 21, pp. 273-280, Lahit, Finlândia, 1997.

FERREIRA, L. D. **Provas Algébricas: uma investigação sobre as justificativas de estudantes da educação básica.** 133f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil, 2008.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental. 264f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil, 1998.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a prova matemática**: um olhar sobre o desenvolvimento profissional. 349 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil, 2009.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**. vol 21, nº 1, pp 6-13, Ontario, Canadá, 1990.

______. Challenges to the Importance of Proof. **For The Learning Mathematics (FLM Publishing Association),** nº 15, vol. 3, pp. 42-49, British Columbia, Canadá, 1995.

SOWDER, L.; HAREL, G. Types of Student's Justifications. **The Mathematics Teacher** , vol. 91, n. 8, pp. 670-675, NCTM, Estados Unidos, 1998.

HEALY, L.; JAHN, A. P.; PITTA COELHO, Sonia. Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: 30ª Reunião Anual da ANPEd. **Anais**... da 30ª Reunião Anual da ANPEd: 30 anos de pesquisa e compromisso social, Caxambu, Brasil, 2007.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. **For the Learning of Mathematics 17**, 1, pp. 7 – 15, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada, 1997.

KNUTH, E. J. Teacher's conceptions of Proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 5, p. 61-88, Kluwer Academic Publishers, Suíça, 2002.

MIYAKAWA, T. Relation between Proof and Conception: the case of proof for the sum of two even numbers. **PME**, v. 26, pp. 353-360, Lahit, Finlândia, 2002.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil, 2005.

Submetido em setembro de 2018
Aprovado em dezembro de 2018