
Geometria Espacial de Posição: análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio

Dienifer da Luz Ferner

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
dieniferlferner@gmail.com

Maria Arlita da Silveira Soares

Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA
arlitasoares@gmail.com

Rita de Cássia Pistóia Mariani

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
rcpmariani@yahoo.com.br

Resumo

Esta pesquisa tem por objetivo analisar, nas atividades apresentadas por duas coleções de livros didáticos, a ocorrência das proposições de Duval relativas às ideias de Geometria Espacial de Posição, segundo um ponto de vista cognitivo. Foram adotados os pressupostos da pesquisa qualitativa e os dados foram analisados conforme princípios da Análise de Conteúdo. A análise dos dados permitiu concluir que as atividades expostas nas coleções envolvem apreensões operatórias, discursiva, perceptiva e raramente sequencial ao abordar conceitos/conteúdos de noções primitivas, posições relativas entre duas retas, reta e plano, dois planos, propriedades de paralelismo e perpendicularismo, projeções ortogonais sobre um plano e distâncias no espaço. No entanto, não foram exploradas atividades envolvendo secções, polígonos reversos, apreensões operatórias do tipo mereológicas e óticas, bem como demonstrações.

Palavras-chave: Registros de representação semiótica. Registro figural. Apreensões. Tipos de problemas em Geometria.

Positional Spatial Geometry: analysis of two collections of high school textbooks

Abstract

This research aim to analyze the occurrence of Duval propositions related to the ideas of Positional Spatial Geometry from a cognitive point of view in the activities presented by two collections of textbooks. The assumptions of the qualitative research were adopted and the data were analyzed according to the principles of Content Analysis. Data analysis allowed us to conclude that the activities exhibited in the collections involve operative, discursive, perceptive and rarely sequential apprehensions when approaching concepts/contents of primitive notions, relative positions between:

two straight, straight and plane, two planes, parallelism and perpendicularism properties, orthogonal projections on a plane and distances in space. However, there were no activities involving sections, reverse polygons; operative apprehensions of the mereological and optical type; as well as demonstrations.

Keywords: Positional Spatial Geometry. Textbooks. Semiotic Representation Registers. Apprehensions.

Introdução

A escolha do tema deste texto emergiu das atividades realizadas no Subprojeto Matemática, vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), e no grupo de pesquisa matE² (Educação e Educação Matemática), ambos desenvolvidos em uma universidade federal da fronteira oeste do estado do Rio Grande do Sul. Dentre as atividades desenvolvidas no subprojeto Matemática, a primeira autora deste texto acompanhou, durante um ano letivo, uma turma de 3º ano do Ensino Médio, em especial, no estudo de Geometria Espacial (GE) e constatou que os conceitos geométricos foram tratados com ênfase na utilização de fórmulas em detrimento a demonstrações, mobilização de diferentes representações matemáticas e tratamentos figurais.

Dada a importância da Geometria “à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços” (BRASIL, 2002, p. 123) e o livro didático ser uma das fontes mais utilizadas por professores (MARTINS; MANDARINO, 2013), foi elaborado o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), da primeira autora, para investigar como a GE é apresentada na coleção de livros didáticos para o Ensino Médio adotada pela escola na qual se desenvolviam as atividades do PIBID, bem como nas coleções escolhidas por outras escolas do município, totalizando duas coleções.

Assim, este texto apresenta um aprofundamento e ampliação das discussões dos resultados referentes à teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), produzidas no TCC, realizadas no grupo de pesquisa matE² (Educação e Educação Matemática), bem como um recorte para os conteúdos/conceitos de Geometria Espacial de Posição (GEP). Optou-se por apresentar os resultados da análise em relação à GEP, pois a identificação das propriedades associadas às posições relativas das formas é tão importante quanto as propriedades métricas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, estas análises serão tomadas na produção dos dados da dissertação de mestrado que está sendo constituída junto ao PPGEMEF/UFSM¹, pela mesma pesquisadora.

¹ Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física ofertado pela Universidade Federal de Santa Maria.

No grupo de pesquisa as problematizações estão relacionadas às temáticas currículo, políticas públicas e formação de professores de Matemática, nas quais destacam-se as leituras e estudos da teoria dos RRS. Entende-se que esta teoria possibilita refletir sobre os fundamentos da Matemática e da sua aprendizagem, pois permite (re)pensar sobre os saberes ensinados na escola em uma perspectiva cognitiva e epistemológica, bem como contribui para a análise de livros didáticos, em especial, na formulação de critérios para identificação dos limites e potencialidades deste recurso.

O texto está organizado de modo a apresentar um quadro teórico compilado sobre as especificidades requeridas no ensino e aprendizagem de Geometria, organizado a partir da leitura e análise das obras de Duval (2004, 2011, 2012, 2013). Na sequência, expõem-se as escolhas metodológicas da pesquisa, sendo esta de cunho qualitativo, e o tratamento, organização e descrição analítica sustentadas pela Análise de Conteúdo, conforme Bardin (2009). Após a apresentação dos aspectos teórico-metodológicos, é apresentada a análise das coleções de livros didáticos selecionadas. Por fim, as considerações finais são expostas com o intuito de subsidiar outras pesquisas e apontar questões para os próximos estudos.

Contribuições dos Registros de Representação Semiótica na Aprendizagem de Geometria

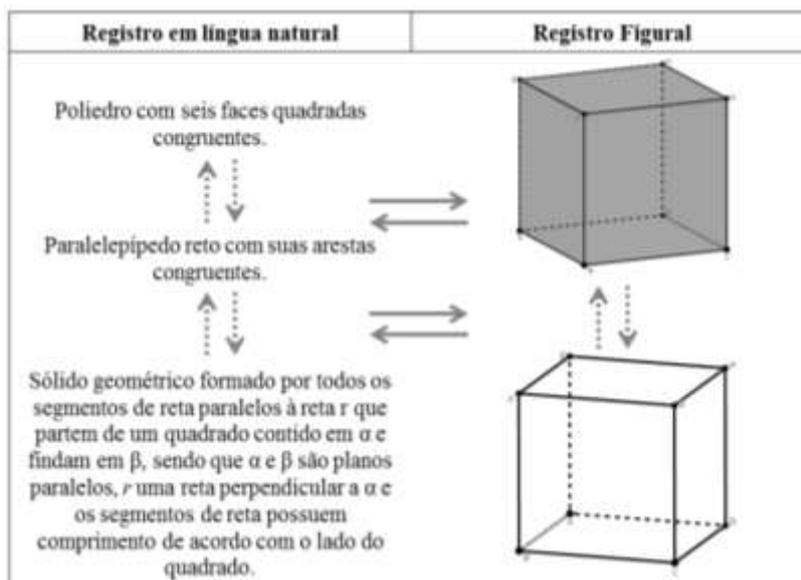
Ao tratar da aprendizagem matemática, consideraram-se os pressupostos da teoria dos RRS, desenvolvida por Raymond Duval, pois estes permitem analisar a aprendizagem segundo um ponto de vista cognitivo, evidenciando a coordenação de diferentes tipos de representações semióticas. As representações semióticas² ganham destaque devido aos objetos matemáticos só serem acessíveis por meio de representações. No entanto, elas “não constitu[em] somente o acesso aos objetos matemáticos, mas [...] determinam os processos cognitivos e epistemológicos dos tratamentos matemáticos” (DUVAL, 2013, p. 15), processos estes que dependem de transformações de representações semióticas.

Na atividade matemática há dois tipos de transformações semióticas: tratamento e conversão. O tratamento consiste em uma transformação interna a um registro e a conversão na transformação de uma representação em outra representação, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2011). Na Figura 1 são expostos diferentes registros de representação semiótica mobilizados para representar um mesmo objeto matemático, o cubo. As setas pontilhadas indicam tratamentos que podem ser realizados e as setas contínuas indicam a

² Representações semióticas são “[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento” (DUVAL, 1993, p. 39).

transformação cognitiva de conversão, neste caso da representação do objeto no registro da língua natural para a representação do objeto no registro figural, ou vice-versa.

Figura 1 – Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: Produzido pelas autoras.

Para obter-se uma apreensão conceitual do objeto matemático “é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis” (DUVAL, 2012, p. 270). Em outras palavras, sua compreensão está relacionada à capacidade de mobilizar e coordenar, ao menos, dois registros de representação semiótica.

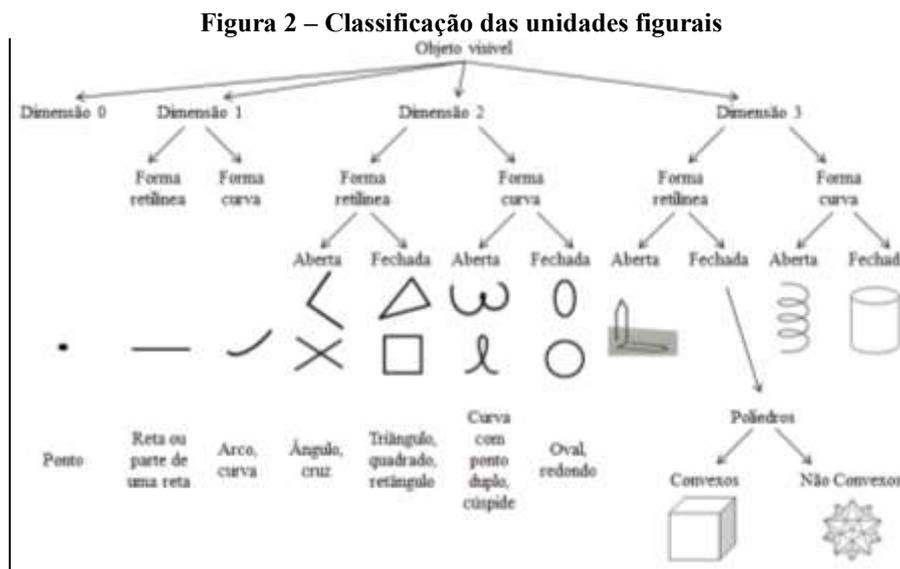
A conversão da representação do objeto no registro da língua natural para o figural, na maioria dos casos, resolve os problemas de Geometria, dada a importância da figura na aprendizagem de conceitos deste campo matemático. As figuras geométricas, conforme Duval (2011), possuem poder cognitivo especial conferido por três características: valor intuitivo; não exigem explicação complementar; e podem ser construídas instrumentalmente. Nas palavras de Duval (2011, p. 84), “as figuras permitem ‘ver’”.

Ver uma figura em Geometria não é algo simples. Os olhares passam por uma evolução que vai do olhar icônico ao não icônico. No olhar icônico,

as formas reconhecidas podem ser simultaneamente distinguidas com as formas ou os contornos de objetos da realidade. Os olhares não icônicos são mais elaborados, e exigem a tomada de consciência de propriedades geométricas, pois não se trata mais de figuras semelhantes às da realidade, mas sim da representação de objetos matemáticos determinados pelo discurso. (SCHEIFER, 2017, p. 52)

Nesta perspectiva, “o primeiro passo na aprendizagem da geometria é a educação ao modo matemático de ver as figuras” (DUVAL, 2013, p. 33). Em outros termos, é preciso “mudar o olhar”,

o que requer a identificação de unidades figurais. Estas são classificadas, visualmente, em dois tipos: dimensional (OD^3 , 1D, 2D e 3D) e qualitativa (forma e elementos geométricos) (Figura 2).



Fonte: Adaptado de Duval (2004, p.159) e Palles (2013, p.41).

Além disso, é essencial “operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista” (DUVAL, 2011, p. 87). A relevância da desconstrução dimensional é enfatizada porque

[m]esmo uma figura aparentemente reduzida a uma única unidade de dimensão 2 (um quadrado, por exemplo), só é uma figura, em matemática, à condição de que seja considerada como uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 (os segmentos que formam os lados). Isso porque são as relações (paralelismo, simetria, tangência, ...) entre as unidades figurais elementares que constituem o conteúdo pertinente de uma figura geométrica. (DUVAL, 2004, p. 159, tradução nossa)

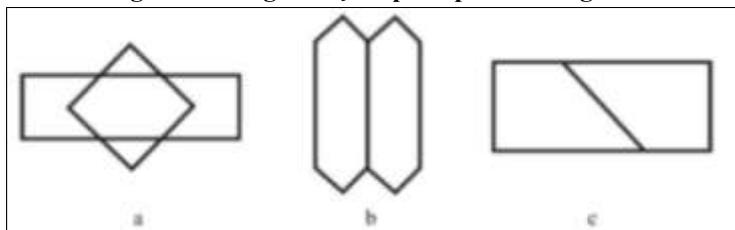
Segundo Moretti e Brandt (2015, p. 602), a “causa do insucesso em muitos problemas em geometria está na dificuldade de olhar uma figura nas dimensões inferiores ao que é dada”. Uma interpretação para este fato pode ser atribuída à percepção, pois esta “focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão maior (justaposição ou superposição), enquanto que o tratamento da situação matemática representada requer que se restrinjam as unidades figurais de dimensões menores” (SCHEIFER, 2017, p. 55).

As figuras podem ter diferentes compreensões, dependendo de cada sujeito, ou seja, interpretações autônomas. Estas interpretações autônomas são classificadas por Duval (2012) em quatro tipos de apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. A apreensão perceptiva refere-se à organização de elementos de uma figura que permite interpretá-la em dada situação geométrica. Conforme Duval (2012), pode ocorrer de três formas a organização perceptiva das

³ A letra D refere-se a dimensão.

figuras: i) superposição de duas formas - a Figura 3a pode ser reconhecida como um retângulo e um quadrado; um retângulo, um hexágono e dois triângulos; ii) agrupamento de duas formas iguais - a Figura 3b possui um lado em comum e pode ser descrita como dois hexágonos; iii) repartição de uma forma - a Figura 3c pode ser descrita como um retângulo com uma partição.

Figura 3 – Organizações perceptivas de figuras



Fonte: DUVAL (2012, p. 121).

A apreensão discursiva relaciona, principalmente, os registros figural e da língua natural, ou seja, figura e enunciado do problema de Geometria. Esta apreensão refere-se à compreensão das unidades figurais apresentadas no enunciado do problema. Ressalta-se que o enunciado pode, ou não, ter congruência semântica com a figura. Em outras palavras, em um problema de Geometria cuja representação figural seja exposta, as propriedades da figura podem ser mais pertinentes para a resolução do que as propriedades apresentadas no enunciado do problema.

A apreensão sequencial está relacionada às atividades de descrição ou construção com o objetivo de reproduzir uma figura. Na busca de solucionar alguns problemas de Geometria podem ser feitas modificações e reorganizações nas figuras, estas entendidas como tratamentos figurais. Conforme Duval (2012), estes tratamentos figurais constituem a apreensão operatória. As modificações e reorganizações figurais podem ser classificadas em: i) modificações mereológicas - dividi-la em outras de mesma dimensão – relação parte/todo – apoia-se diretamente na percepção; ii) modificações óticas - transformá-la em outra por meio de processos de aumentar, diminuir ou deformar; iii) modificações posicionais - deslocá-la em relação a um referencial.

Conforme Moretti (2013, p. 2), “não há hierarquia entre as apreensões, mas uma subordinação de uma em relação a outra dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais”. Além disso, há problemas que exigem a articulação entre duas ou mais apreensões. Duval (1997⁴ apud FLORES, 1997, p. 39, grifos nossos) sublinha quatro articulações entre as apreensões, a saber:

- a) a articulação entre apreensão perceptiva e discursiva (para ter aquilo que chamamos de figura geométrica);
- b) a articulação entre apreensão discursiva e sequencial;
- c) a articulação entre apreensão perceptiva e operatória (o que corresponde a visualização, sendo que para visualização não é preciso a mobilização

⁴ Duval, R. La Geometrie et les Variables de Visualisation, 1997.

de teoremas ou proposições); d) a articulação entre apreensão operatória e discursiva (que permite unir a heurística e a prova).

As articulações entre as apreensões definem tipos de problemas em Geometria, a saber: perceptiva e discursiva – figura geométrica; discursiva e sequencial – construção geométrica; perceptiva e operatória – visualização; operatória e discursiva – heurística e demonstração (FLORES, 1997; MORETTI, 2013; SCHEIFER, 2017). O entendimento das articulações entre apreensões, no ensino da geometria, possibilita ao professor avaliar, de forma crítica, as atividades que são propostas em livros didáticos e o desenvolvimento destas em sala de aula.

Opções Metodológicas

A escolha teórico-metodológica adotada foi de uma pesquisa qualitativa cuja técnica escolhida foi a Análise de Conteúdo que, conforme Bardin (2009), constitui-se em identificar as estruturas e os elementos do conteúdo para assim explicar suas diferentes características e significados.

Sua utilização compreende a realização de três etapas: a) Pré-análise – etapa de organização, compreende a formulação dos objetivos, escolha e organização de documentos e elaboração das categorias de análise; b) Exploração do material – consiste em analisar e produzir os dados; c) Tratamento dos resultados e interpretações – versa sobre o tratamento de dados obtidos para serem significativos e válidos (BARDIN, 2009).

As fontes de produção de dados foram duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio (C1 e C2⁵), aprovadas pelo PNLD/2015, adotadas pelas escolas estaduais de um município da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul, nas quais, buscou-se identificar, inicialmente, em que ano escolar a GEP é abordada, qual o total de páginas, o percentual que ocupa quando comparada à Geometria e à Geometria Espacial.

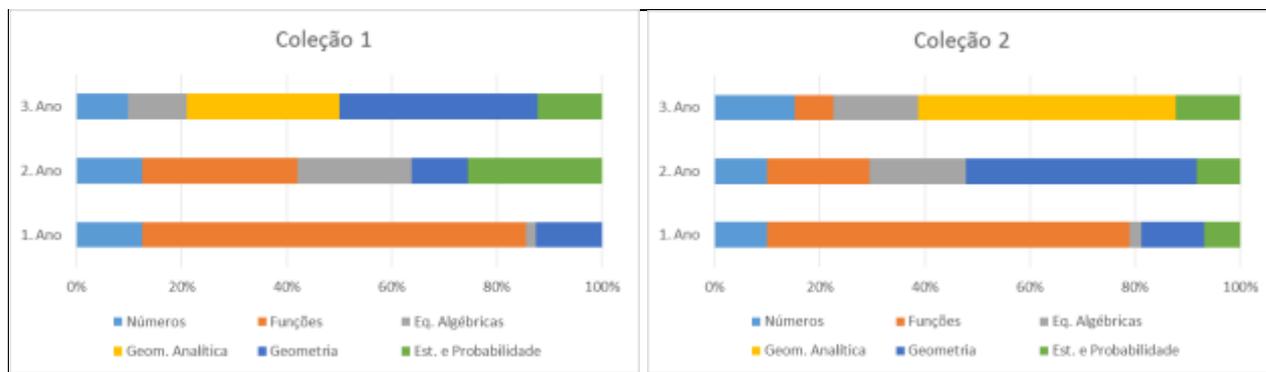
Posteriormente, verificaram-se a distribuição dos conceitos/conteúdos de GEP e o número de atividades propostas em cada coleção. Considerando as referências teórico-metodológicas, analisaram-se as transformações cognitivas, os sentidos das conversões, assim como, a identificação das atividades que contém, em particular, o registro figural seja no enunciado e/ou na resolução. Por fim, caracterizaram-se as atividades quanto às apreensões e suas articulações, permitindo classificá-las em diferentes tipos de problemas, a saber: figura geométrica; construção geométrica; visualização; e heurística e demonstração.

⁵ As coleções foram identificadas dessa forma para não expô-las, pois nosso intuito não foi de avaliá-las.

Análise dos Resultados

Em um primeiro momento, optou-se por verificar como estão distribuídos os conteúdos matemáticos nas coleções analisadas, conforme dados do PNLD/2015 (BRASIL, 2014) (Figura 4).

Figura 4 – Gráfico que representa a distribuição dos conteúdos nos volumes analisados das coleções



Fonte: Adaptado do PNLD/2015 (BRASIL, 2014).

A Figura 4 indica que os elaboradores do guia de livros didáticos (PNLD/2015) separam os conteúdos de Geometria em dois: Geometria – que aborda conteúdos de plana e espacial – e Geometria Analítica. Verifica-se que os conteúdos de geometria plana e espacial são abordados em todos os volumes de C1. C2 apresenta esses conteúdos nos volumes 2 e 3. Cabe destacar que os conteúdos de Geometria Plana abordados nas coleções enfatizam as propriedades métricas (quantificar comprimentos e áreas), com o intuito de contribuir no estudo dos conteúdos de Geometria Espacial, em particular, área e volume de sólidos geométricos.

A ênfase dada aos conceitos/conteúdos de GE e às propriedades métricas (quantificar comprimentos, áreas e volumes) pode ser constatada por meio do número de páginas dedicadas em detrimento da GEP (Quadro 2), uma vez que esta corresponde a, aproximadamente, 23% (C1) e 27,7% (C2), dos conceitos/conteúdos de GE. Em relação à C2, os autores do guia de livros didáticos afirmam que “predominam os conteúdos ligados ao cálculo de comprimentos, áreas, volumes e amplitude de ângulos. A ênfase recai, assim, na geometria métrica” (BRASIL, 2014, p. 53).

Quadro 2 – Indicadores dos livros didáticos

	C1			C2		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
Nº de páginas por volume	320	320	320	320	320	256
Nº de páginas sobre Geometria por volume	35	28	104	19	120	0
Nº de páginas sobre Geometria Espacial por volume	0	0	104	0	94	0
Nº de páginas sobre Geometria Espacial de Posição por volume	0	0	24	0	26	0

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar as páginas dedicadas à GEP, constata-se que, na C1, esta constitui um dos três capítulos que compõem a unidade denominada Geometria (volume 3); os demais capítulos são intitulados: poliedros e corpos redondos. Na C2, ela compõe um dos dezesseis capítulos que formam o volume 2. Neste volume da C2 são apresentados, também, os seguintes capítulos relacionados à Geometria Espacial: prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera. O Quadro 3 expõe os conceitos/conteúdos de GEP abordados nas duas coleções, bem como a quantidade de atividades apresentadas.

Quadro 3 – Distribuição dos conceitos/conteúdos de GEP

Conceitos/Conteúdos		Nº de atividades	
		C1	C2
Geometria Espacial de Posição	Noções primitivas	6	4
	Posições relativas entre: duas retas, reta e plano, dois planos	21	8
	Propriedades: paralelismo e perpendicularismo	7	8
	Projeções ortogonais sobre um plano	3	2
	Distância no espaço	4	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados do Quadro 3 indicam que, em ambas as coleções, foram enfatizados os mesmos conceitos/conteúdos referentes à GEP. Sublinha-se que os autores da C2 optam por apresentar e demonstrar quatro teoremas (interseção de planos secantes, reta paralela a um plano, planos paralelos, reta perpendicular a um plano) após a exposição do conteúdo e das atividades. Os autores da C1 expõem e demonstram dois teoremas (um relacionado a determinação de planos e outro sobre a interseção de uma reta com um plano, caso em que a reta não está contida no plano). Esta opção pode ter propiciado a seguinte avaliação da obra no guia de livros didáticos: “Em geometria de posição, são enunciados postulados e propriedades sobre retas e planos, em alguns casos, com excesso de formalismo” (BRASIL, 2014, p. 71).

Quanto ao número de atividades (resolvidas e propostas) contidas nos capítulos de GEP nas coleções, verifica-se que na C1 há um total de 41 atividades (7 resolvidas e 34 propostas) e na C2 um total de 23 (3 resolvidas e 20 propostas). Ao comparar estas quantidades com o total de atividades apresentadas nos outros capítulos que tratam de GE, percebe-se que estas representam aproximadamente 16,1% e 14,0%, respectivamente. Pode-se afirmar que o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos é pouco explorado, o que prejudica o desenvolvimento do pensamento geométrico. Sublinha-se que, para desenvolver este tipo de pensamento, é preciso ir além da métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos. Em outras palavras, deve-se

[...] contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. (BRASIL, 2002, p. 123)

Os dados do Quadro 4 expõem a classificação das atividades em relação as transformações cognitivas. Observa-se que, em ambas coleções, a mais evidenciada é a conversão. O sentido da conversão mais explorado é da representação no registro figural para a representação na língua natural. No entanto, apesar de conter atividades que partam da representação do objeto no registro figural para a representação na língua natural, não foi possível observar o outro sentido dessa conversão e nem mesmo questões que envolvessem conversões nos dois sentidos, considerando outros sistemas representacionais. Desse modo, observam-se indícios de convergência entre os encaminhamentos das obras e os pressupostos da teoria dos RRS, no que tange a importância de mobilizar ao menos dois registros de representação (DUVAL,2011). Entretanto, não foi evidenciada diversidade de registros e a maioria dos tratamentos propostos ocorre na representação em língua natural.

Quadro 4 – Transformações cognitivas exploradas nas atividades

Transformações cognitivas	C1	C2
Tratamento	18	11
Conversão	23	12

Fonte: Dados da pesquisa.

Dada a importância do registro figural para a aprendizagem em Geometria, optou-se por identificar, no capítulo específico de GEP de cada coleção, as atividades que apresentam o registro figural em seu enunciado e/ou que este registro seja necessário para sua resolução⁶ (Quadro 5). Verifica-se que, das 41 atividades apresentadas no capítulo de GEP da C1, 31 envolvem o registro figural (75,6% do total do capítulo). Das 23 atividades expostas no capítulo de GEP da C2, 13 envolvem o registro figural (56,5% do total do capítulo).

Quadro 5 – Distribuição dos conceitos/conteúdos quanto ao registro figural

Conceitos/Conteúdos		Nº de atividades que apresenta Registro Figural			
		C1		C2	
		Enunciado	Resolução	Enunciado	Resolução
Geometria Espacial de Posição	Noções primitivas	3	1	1	1
	Posições relativas entre: duas retas, reta e plano, dois planos	12	1	5	0
	Propriedades: paralelismo e perpendicularismo	4	3	5	0
	Projeções ortogonais sobre um plano	1	2	0	0
	Distância no espaço	3	1	1	0

Fonte: Dados da pesquisa.

⁶ As resoluções consideradas foram as propostas pelos autores das coleções na seção intitulada “Orientações para o professor”.

Segundo Duval (2004, 2011), uma das formas de reconhecer a importância que os registros figural e na língua natural (enunciados) desempenham na aprendizagem da Geometria, de um ponto de vista cognitivo, é por meio da identificação das apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial). Conforme as articulações estabelecidas entre as apreensões, é possível caracterizar os tipos de problemas em Geometria: figura geométrica (FG); construção geométrica (CG); visualização (V); heurística (H); e demonstração. Nesta perspectiva, as atividades que apresentam o registro figural (Quadro 5) foram reanalisadas com o intuito de identificar possíveis articulações entre as diferentes apreensões (Quadro 6).

Importante destacar que, em relação à C1, ao analisar as atividades do registro figural relacionadas a noções primitivas, foram identificadas quatro atividades das quais três puderam ser categorizadas nos tipos de problemas. Ainda em C1, quanto aos conceitos/conteúdos relacionados a projeções ortogonais sobre um plano, uma delas pôde ser classificada em dois tipos de problema (construção geométrica e heurística).

Quadro 6 – Distribuição dos conceitos/conteúdos quanto ao tipo de problema em geometria

Conceitos/Conteúdos		C1				C2			
		FG	CG	V	H	FG	CG	V	H
Geometria Espacial de Posição	Noções primitivas	1	1	0	1	0	1	0	1
	Posições relativas entre: duas retas, reta e plano, dois planos	0	1	0	12	0	0	0	8
	Propriedades: paralelismo e perpendicularismo	1	3	0	3	0	0	0	2
	Projeções ortogonais sobre um plano	0	3	0	1	0	0	0	0
	Distância no espaço	0	1	0	3	0	0	0	1

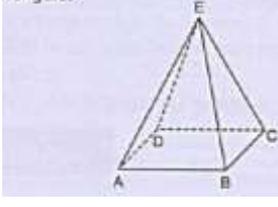
Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados do Quadro 6 indicam que heurística é o tipo de problema mais abordado e o que explora a maior diversidade de conceitos/conteúdos, tanto na C1 quanto na C2. Na C2 apenas as atividades relacionadas a projeções ortogonais sobre um plano não contêm atividades vinculadas a esse tipo de problema. Reitera-se que problemas de heurística requerem articulação entre as apreensões perceptiva, discursiva e operatória.

A Figura 5 exibe um problema de heurística em que, para resolvê-lo, pode-se: i) reconhecer as diferentes unidades figurais - dimensão (3D), qualitativa (forma retilínea – fechada – poliedro - convexo); ii) verificar no enunciado que trata de uma pirâmide cuja base é um retângulo - apreensão discursiva; e, iii) prolongar as retas suportes dos segmentos da figura, identificando os planos que as contem por meio da rotação da figura (mentalmente) - apreensão operatória de posição, subordinada pela apreensão perceptiva. Este tipo de atividade é similar a outras apresentadas nas duas coleções; as modificações percebidas referem-se ao sólido geométrico escolhido (paralelepípedo, cubo, prisma

de base pentagonal e hexagonal) e se posições relativas são entre retas, retas e planos ou entre planos, não alterando a exigência cognitiva.

Figura 5 – Análise cognitiva da atividade na C1 (p.170)

<p>Observe a pirâmide a seguir, cuja base é um retângulo.</p>  <p>Determine a posição relativa entre:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) as retas \overline{AB} e \overline{BC}; b) as retas \overline{AB} e \overline{EC}; c) as retas \overline{AD} e \overline{BC}; d) a reta \overline{AB} e o plano (BEC); e) a reta \overline{AD} e o plano (BEC); f) as retas \overline{BD} e \overline{EC}. 	<p>Apreensões: Discursiva, Operatória Posicional e Perceptiva.</p> <p>Tipo de problema: Heurística</p> <p>Desconstrução: 3D – 2D – 1D</p> <p>Conceito/Conteúdo: Posições relativas de retas</p>
---	---

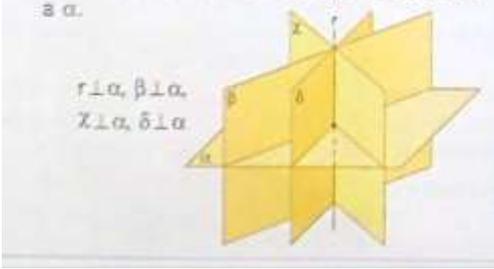
Fonte: Dados da pesquisa.

O número significativo de atividades categorizadas como problemas de heurística deve-se ao fato de que, em Geometria Espacial, a apreensão operatória de posição é exigida em muitas atividades, pois, para identificar o número de faces, arestas e vértices, bem como as posições relativas destes, é preciso realizar uma rotação (mentalmente). Outro tipo de problema que envolve a apreensão operatória é o de visualização – articulação entre apreensão perceptiva e operatória. Entretanto, nas duas coleções de livros didáticos não foram categorizadas atividades como problemas de visualização devido ao fato de, somente a mobilização das apreensões perceptiva e operatória não garantir a resolução das atividades, sendo necessária a apreensão discursiva para identificação das propriedades dos objetos tridimensionais, visto que as representações destes, no plano (perspectiva), nem sempre deixam evidente estas propriedades.

O segundo tipo de problema mais abordado nas duas coleções é de construção geométrica que requer a conexão entre as apreensões discursiva e sequencial. Segundo Duval (2012), há uma importância legítima dada a esse tipo de atividade, pois as atividades de construção “ensinam a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística das figuras.

A atividade exposta na Figura 6 representa um problema de construção geométrica que, para solucioná-lo, o estudante pode recorrer a diferentes tipos de registros, como língua natural, simbólica e/ou figural. Tomando como exemplo a resolução da segunda afirmação (letra b) da atividade, temos que é necessário: i) identificar os diferentes elementos e suas dimensões (2D, 1D); ii) compreender propriedades de perpendicularismo entre reta e plano – apreensão discursiva; iii) perceber que distintas retas contidas no plano α podem ter o mesmo ponto em comum na reta r , e que pode-se construir distintos planos que contenham essas retas e a reta r – apreensão sequencial, subordinada pela apreensão perceptiva.

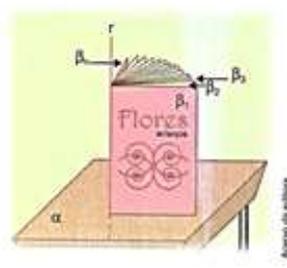
Figura 6 – Análise cognitiva da atividade na C1 (p.59)

<p>RS. Classifique em verdadeiro ou falso cada item a seguir, justificando cada caso.</p> <p>a) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a qualquer reta de α.</p> <p>b) Por uma reta r, perpendicular a um plano α, passam infinitos planos perpendiculares a α.</p> <p>c) Se dois planos α e β são paralelos a uma reta r, então α e β são paralelos entre si.</p> <p>d) Se dois planos α e β são secantes, então toda reta de um desses planos é secante ao outro.</p>	<p>Apreensões: Discursiva, Perceptiva e Sequencial.</p>
<p>b) Verdadeiro, pois se uma reta r é perpendicular a um plano α, então qualquer plano que contenha r será perpendicular a α.</p>	<p>Tipo de problema: Construção geométrica</p>
	<p>Desconstrução: não há</p>
<p>Conceito/Conteúdo: Propriedades: paralelismo e perpendicularismo</p>	

Fonte: Dados da pesquisa.

Atividades envolvendo problemas do tipo figura geométrica (articulação entre as apreensões perceptivas e discursivas) foram identificadas apenas na C1 (Quadro 6). Neste tipo de problema, segundo Duval (2004), é necessário analisar a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidenciadas no registro figural. A Figura 7 exemplifica uma das atividades classificadas como problema de tipo figura geométrica. Nesta, mesmo que em um primeiro momento a posição da reta r em relação ao plano horizontal (mesa) possa se impor (apreensão perceptiva), é preciso analisar as propriedades para garantir que r é perpendicular a α .

Figura 7 – Análise cognitiva da atividade 28 na C1 (p. 60)

<p>A imagem representa um livro na posição vertical sobre uma mesa, em que α é o plano correspondente ao tampo da mesa (na horizontal), e os planos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ representam a capa e cada uma das páginas do livro. Se uma reta r está contida em $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$, qual a posição relativa de r em relação a α?</p> 	<p>Apreensões: Discursiva e Perceptiva</p>
<p>Tipo de problema: Figura geométrica</p>	
<p>Desconstrução: 3D – 2D – 1D</p>	
<p>Conceito/Conteúdo: Propriedades de perpendicularismo</p>	

Fonte: Dados da pesquisa.

A atividade reproduzida na Figura 8 é a única, das duas coleções, em que é solicitada a construção (desenho) de um sólido já no enunciado – apreensão sequencial. Há outras duas atividades, nesta mesma coleção, em que o registro geométrico é proposto para a resolução, nas quais as apreensões possíveis são a discursiva, perceptiva e sequencial.

Figura 8 – Análise cognitiva da atividade 31 na C1 (p.62)

Na elaboração de alguns projetos, não é necessário desenhar as seis vistas, pois pela combinação de algumas delas é possível descrever o objeto com exatidão. Na figura a seguir, a combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior é suficiente para representar a forma do objeto considerado.

a) De acordo com os planos que contêm as faces, e as retas que contêm as arestas da figura acima, determine:
 • os planos paralelos àquele que contém a face EFGH
 • os planos perpendiculares àquele que contém a face LKOP.

b) Desenhe a vista superior, a vista frontal e a vista lateral esquerda do objeto ao lado, desenhado em perspectiva.

c) Desenhe em perspectiva o objeto cujas vistas lateral direita, frontal e superior são dadas por:

d) Quais vistas podem ser utilizadas para melhor representar cada objeto a seguir?

Fonte: Dados da pesquisa.

O esperado, ao analisar as atividades relacionadas à GEP, era que essas exigissem dos estudantes a investigação de propriedades, elaboração de conjecturas e produção de argumentos, o que contribuiria para formação do raciocínio hipotético-dedutivo. Contudo, não foram identificadas atividades que exigissem demonstração.

A desconstrução dimensional foi identificada em ambas as coleções analisadas, partindo sempre do objeto tridimensional para seus elementos de menor dimensão. Na C1, 25 atividades exigem algum tipo de desconstrução dimensional, das quais 80% requerem o reconhecimento de elementos 2D e 1D, ou seja, planos, retas e/ou segmentos de retas. Na C2, são um total de 12 atividades que propiciam a desconstrução dimensional, e, assim como na C1, a maioria destas considera inicialmente o sólido geométrico (3D) representado em perspectiva paralela, em seguida identificam-se os planos das faces (2D), e, por fim, verificam-se as retas que contêm os segmentos que formam os lados das faces (3D – 2D – 1D).

Considerações finais

Diante dos dados produzidos, considera-se que não foram exploradas atividades envolvendo secções, polígonos reversos, apreensões operatórias do tipo mereológicas e óticas, bem como problemas do tipo demonstração. Estes resultados corroboram as afirmações de Almouloud et al. (2004), ao analisarem livros didáticos, evidenciando a falta de reconhecimento do importante papel da figura na visualização e nas fases de exploração quando se trabalham conceitos/conteúdos de Geometria.

Além disso, observa-se apenas uma atividade que requer a apreensão sequencial em seu enunciado, o que não contribui para a aprendizagem de conceitos/conteúdos de GEP, sob o ponto de vista de Duval (2004, 2011, 2012), pois o autor preconiza a variedade de articulação entre as apreensões. Para além da elaboração de atividades que empreguem régua e compasso, atualmente, tal

apreensão pode ser explorada a partir do emprego de *softwares* de Geometria Dinâmica, que possuem uma versão 3D, como é o caso do GeoGebra.

Nesse âmbito torna-se imprescindível que o professor esteja atento e considere outros materiais didáticos em sua aula, como também pesquise encaminhamentos didáticos em mais de uma obra, pois, a partir dos dados apontados, pode-se considerar que as atividades propostas pelas coleções não potencializam o desenvolvimento de capacidades como investigar propriedades, conjecturar e demonstrar, isto é, não contribuem na formação do raciocínio hipotético-dedutivo.

Por fim, conjectura-se que esta pesquisa é o ponto de partida de um estudo, em desenvolvimento, que toma como sujeitos futuros professores de Matemática e discute as apreensões mobilizadas a partir atividades que contam com o apoio do GeoGebra e abordam GEP tomando como elemento norteador o estudo do cubo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BRASIL. **Guia de livros Didáticos: PNLD 2015: Matemática/Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.**

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.**

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v.07, n.1, p.118-138, 2012.2012

_____, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Concedida a FREITAS, de. J. L. M.; REZENDE, V. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.2, n.3, 2013.

_____, R. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Universidad del Valle: PeterLang, 2004.

_____, R. **Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. Org.: Tânia M. M. Campos. 1º Ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FLORES, C. R. **Geometria e Visualização: Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

MARTINS, R. B.; MANDARINO, M. C. F. Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. **BOLETIM GEPEM**. nº 62. Jan./Jul. 2013, p.101–115.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 2, p. 289-303. Canoas, 2013.

MORETTI, M.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria Dinâmica**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SCHEIFER, C. **Design Metodológico para a Análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

Submetido em agosto de 2018
Aprovado em dezembro de 2018