
Estratégias de estruturação espacial utilizadas por alunas do 1.º ano na construção e reprodução de figuras bidimensionais

Joana Conceição

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
conceicaoj@campus.ul.pt

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa;
margaridar@esex.ipl.pt

Resumo

Este artigo pretende aprofundar o conhecimento acerca do processo de estruturação espacial de alunos do 1.º ano do Ensino Básico, analisando estratégias utilizadas por duas alunas na realização de duas tarefas, uma centrada na construção e desenho e outra na reprodução com materiais manipuláveis de figuras bidimensionais. Os dados foram recolhidos durante um estudo piloto realizado na preparação de uma experiência de ensino respeitante à primeira fase da investigação baseada em design. Os resultados mostram que as alunas usam, como estratégias de estruturação, o aspeto global das peças, o comprimento dos lados e, por vezes, os ângulos. O recurso a figuras com orientações prototípicas é também bastante comum. O nível de estruturação das alunas foi diferente entre as duas tarefas e também entre construir e desenhar a construção. Os desenhos, junto com os materiais manipuláveis, parecem oferecer o potencial de levar as alunas a refletir sobre a estrutura das figuras.

Palavras-chave: Estruturação espacial. Raciocínio espacial. Composição/decomposição. Desenhos.

1st graders spatial structuring strategies while constructing and reproducing two-dimensional figures

Abstract

This paper aims to deep the existent knowledge about spatial structuring processes, used by 1st grade students, by analyzing two students' strategies while solving two tasks with two-dimensional figures, one focused on construction and drawing and another focused on reproduction using manipulatives. Data was collected during a preliminary study, in the learning experiment preparation phase, the first phase of design research. Results show that students use, as structuring strategies, global appearance, side length and, sometimes, angles as well as shapes in prototypical orientation are also used. Students structuring level varied among tasks and between construction and drawing. Drawings, together with manipulatives, seem to offer students the opportunity to reflect about the nature of figures structures.

Keywords: Spatial structuring. Spatial reasoning. Composing/decomposing. Drawings.

Introdução

A estruturação espacial, de acordo com Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) constitui-se como uma forma de abstração que permite construir uma forma de organização para um objeto ou para um conjunto de objetos. No caso da Geometria, a estruturação espacial permite criar modelos mentais que representem de forma adequada as relações espaciais e mais tarde geométricas e que são essenciais no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Tal como Battista et al. (1998) sugerem, a estruturação espacial constitui a base para o raciocínio geométrico, uma vez que o estabelecimento de relações que permitam estruturar o espaço é fundamental na Geometria.

Nos primeiros anos, o ensino da Geometria deve privilegiar a exploração de uma diversidade alargada de figuras, atendendo a estruturas, características e relações (NCTM, 2000), permitindo que os alunos comecem a estabelecer relações, quer entre figuras quer entre componentes de figuras. Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) sugerem as construções e operações com figuras aspetos importantes, nos primeiros anos. Estes aspetos oferecem condições para trabalhar a estrutura das figuras, a partir da construção de relações entre partes de figuras e entre essas partes e o todo, essenciais para a estruturação espacial.

Atualmente, no que respeita à estruturação espacial, existe pouca investigação desenvolvida. Os trabalhos publicados decorrem da investigação realizada por Battista e Clements (1996), Battista et al. (1998) e Battista (2008), nos EUA. Consideramos por isso importante aprofundar o estudo acerca da forma como os alunos estruturam o espaço, sobretudo nos anos iniciais.

Este estudo, integrado numa investigação mais ampla, no âmbito de um doutoramento, tem como objetivo compreender como é que os alunos do 1.º ano do Ensino Básico desenvolvem a estruturação espacial de figuras bidimensionais e tridimensionais a partir de tarefas que envolvam construções e operações com figuras. Neste artigo, procuramos responder à questão: Que estratégias utilizam os alunos para estruturar espacialmente figuras bidimensionais em tarefas que envolvam a construção e a reprodução de figuras?

Analizamos duas tarefas, uma que envolve construções livres com triângulos de papel e registo escrito das construções, e outra que envolve a reprodução de figuras bidimensionais com blocos-padrão. Ambas foram recolhidas durante um estudo piloto que decorreu numa fase inicial da investigação.

Estruturação espacial

Nos primeiros anos, as aprendizagens em Geometria estão mais associadas a experiências espaciais e, por isso, relacionadas com o desenvolvimento do raciocínio espacial, através de um

aprofundamento progressivo da compreensão e da estruturação do espaço. O raciocínio espacial é aqui entendido na perspectiva de Battista (2007, p. 843) como a “capacidade para ‘ver’, inspecionar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações”, tendo um papel fundamental na estruturação espacial, pois contribui para identificar e estabelecer relações a partir da inspeção de um objeto. Por sua vez, a estruturação espacial permite a abstração de relações para esses mesmos objetos contribuindo para um repertório de imagens mentais cada vez mais complexas colocadas ao serviço do raciocínio espacial. Pela sua natureza visual, o raciocínio espacial está, como diz Battista (2007), subjacente à maior parte do raciocínio geométrico. De facto, de acordo com Battista (2007), nos primeiros anos, o raciocínio espacial parece ser o tipo de raciocínio dominante no que respeita ao pensamento geométrico, não excluindo outros como o raciocínio descritivo-analítico e o abstrato-relacional que têm, no entanto, uma presença menos relevante.

Battista (2008) apresenta um modelo teórico para o desenvolvimento progressivo do raciocínio geométrico baseado em níveis de estruturação: estruturação espacial, estruturação geométrica, estruturação lógica/axiomática. A estruturação espacial consiste no estabelecimento de relações espaciais entre componentes de uma determinada figura. A estruturação geométrica consiste no “uso de conceitos geométricos formais para representar ou analisar” (BATTISTA, 2012, p. 3) as relações espaciais construídas a partir da estruturação espacial. A estruturação lógica/axiomática utiliza e organiza os conceitos geométricos e as relações geométricas em sistemas (BATTISTA, 2012). Assim, tal como o raciocínio espacial constitui a base para o raciocínio geométrico, também a estruturação espacial constitui a base para a estruturação geométrica.

Como refere Battista (2012, p. 3), a estruturação espacial “é o processo principal no pensamento geométrico”, porque permite a criação de imagens e modelos mentais fundamentais que se constituem como alicerces importantes associados ao raciocínio espacial. A estruturação espacial implica a decomposição de um objeto nas suas partes principais e o estabelecimento de relações entre essas partes. O processo de estruturação espacial está relacionado, por isso, com a identificação de componentes espaciais, a combinação de componentes em compostos espaciais e o estabelecimento de inter-relações entre componentes e compostos (BATTISTA, 2012). A compreensão das relações espaciais, que se vai criando e aprofundando através da estruturação espacial, permite aos alunos raciocinar num nível cada vez mais elevado.

De acordo com Battista e Clements (1996), a estruturação espacial pode ser local, quando os alunos começam a discriminar componentes e a estabelecer relações entre eles, mas ainda não há uma relação entre componentes e o todo. Quando já são capazes de estabelecer relações, coordenando os componentes em compostos e entre os compostos e o todo, há então uma estruturação global.

Battista e Clements (1996) consideram duas operações cognitivas envolvidas no processo de estruturação espacial. A primeira, a coordenação, permite estabelecer relações entre diferentes partes de um objeto, como é por exemplo o caso de diferentes vistas ortogonais. A segunda, a integração, permite estabelecer uma correspondência entre um modelo mental prévio e a estrutura de um modelo físico (objeto). A capacidade de integração, utilizando modelos mentais já existentes, parece estar ligada à antecipação, permitindo a mobilização desses modelos mentais para estruturar uma figura. A sua ausência implica a construção de novos modelos mentais a partir do estabelecimento de novas relações e da sua abstração. Esta relação entre modelos mentais e modelos físicos implica também a coordenação de diferentes partes que estruturam esse objeto.

Os níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico por estruturação estão naturalmente próximos dos níveis de van Hiele reformulados por Battista (2007). As duas propostas parecem apresentar aspetos complementares, na medida em inicialmente os alunos percecionam as figuras como um todo antes de discriminarem componentes, mas este aspeto não é descrito por Battista (2008). Clements, Swaminathan, Hannibal e Sarama (1999) referem a dificuldade que os alunos têm em reconhecer exemplos não-prototípicos de figuras que admitem uma diversidade alargada de exemplos, como o triângulo. O facto de os alunos não atenderem aos atributos das figuras, mas ao seu aspeto global pode condicionar a compreensão das relações entre as suas propriedades e a sua classificação.

As construções e as operações com figuras enunciadas por van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) constituem-se como aspetos relevantes para desenvolver a estruturação espacial, ao proporcionar condições para que os alunos experienciem diferentes aspetos da estrutura dos objetos, levando-os a reconhecer componentes e a estabelecer relações. Uma das formas de desenvolver o trabalho com construções é através da composição e decomposição de figuras. Clements e Sarama (2014) propõem uma trajetória de aprendizagem para a composição/decomposição de figuras bidimensionais onde a progressão dos alunos está relacionada com a capacidade de estabelecer relações entre componentes de figuras e antecipar essas relações, tal como referido relativamente à estruturação espacial. Os níveis para a composição/decomposição de figuras bidimensionais estão associados a faixas etárias:

Quadro 1 – Trajetória para o desenvolvimento dos alunos para a composição/decomposição de figuras bidimensionais

(0-3 anos) Pré-compositor	Manipula figuras sem conseguir combiná-las para compor uma figura maior. Decompõe por tentativa e erro.
(4 anos) Juntador de peças	Compõe figuras onde cada peça corresponde a uma parte da construção.

(5 anos) Construtor de figuras Decompositor simples Compositor de figuras	Combina peças para compor uma parte da construção, por tentativa e erro. Escolhe figuras pelo aspeto global ou medida dos lados. Decompõe figuras simples que têm indícios para a decomposição. Compõe figuras com antecipação. Escolhe peças tendo em conta os ângulos e os comprimentos dos lados. a rotação e reflexão para posicionar as peças.
(6 anos) Compositor de substituição Decompositor de figuras	Compõe figuras a partir de peças mais pequenas e usa a tentativa e erro para trocar partes compostas. Decompõe figuras usando imagens mentais.
(7 anos) Compositor de figuras iterativo Decompositor de figuras com imagens mentais.	Constrói e duplica figuras compostas (unidades superordenadas) compreendendo a equivalência entre a peça grande e peças pequenas. Decompõe figuras com antecipação para construir novas figuras.
(8 anos) Compositor de figuras com unidades superordenadas Decompositor de figuras com unidades superordenadas.	Constrói e aplica unidades superordenadas. Decompõe figuras usando novas imagens mentais ou formas de composição já conhecidas.

Fonte: Clements; Sarama, 2014.

Nesta trajetória, verificamos que, além da progressão no estabelecimento de relações entre componentes, compostos e o todo, a passagem da utilização da tentativa e erro para a composição com antecipação é um aspeto fundamental. A utilização da tentativa e erro sugere que as relações entre partes ou entre partes e o todo estão ainda numa fase exploratória, e por isso associa-se à estruturação local. A composição com antecipação sugere que os alunos detêm já imagens mentais com relações bem estabelecidas quer entre partes quer entre partes e todo, ligadas à estruturação global.

As operações com figuras, associadas a transformações geométricas, contribuem para o estabelecimento de relações entre componentes ou entre compostos, mas também permitem estabelecer relações de congruência entre objetos distintos. De acordo com Clements e Sarama (2014) as crianças são capazes de usar translações, reflexões e rotações, desde os cinco anos, ainda que inicialmente apenas ao nível da manipulação de materiais.

Para levar os alunos a perceberem e estabelecer relações entre componentes de figuras, as experiências de aprendizagem, nos primeiros anos, devem contemplar explorações, investigações e discussões na sala de aula sobre as figuras e estruturas geométricas, nomeadamente através da observação e da descrição de figuras variadas (NCTM, 2000). A valorização de diferentes meios de comunicação matemática (linguagem falada ou escrita, gestos, objetos, símbolos ou desenhos) permite ao professor ter diferentes formas de acesso às conceções dos alunos. No caso particular dos desenhos, Thom e McGarvey (2015) referem que estes podem ter uma dupla função, por um

lado como forma de acesso aos processos de visualização dos alunos e, por outro lado, como uma ferramenta importante para a aprendizagem, na medida em que a reflexão dos alunos sobre o próprio processo de desenhar evidencia relações espaciais, constituindo um modo de pensar e, por isso, um meio para a aprendizagem. Os materiais manipuláveis têm, nos primeiros anos, um papel importante pois permitem mediar a passagem de representações físicas para representações mentais através da sua manipulação e da reflexão que fazem acerca dessa manipulação (VON GLASERSFELD, 1991).

Metodologia

O estudo assumiu uma natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), com uma abordagem de investigação baseada em design (IBD) (COBB; GRAVEMEIJER, 2008), tendo como objetivo o aprofundamento de uma teoria local de aprendizagem incidente no desenvolvimento da estruturação espacial de alunos do 1.º ano do Ensino Básico. Os dados foram recolhidos durante um estudo piloto, na fase de preparação da experiência de ensino que constitui a primeira fase da IBD. Tinha como propósito testar a adequação de tarefas e sequências de tarefas, o uso de materiais manipuláveis e ainda recolher informação sobre estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas.

As duas alunas participantes (Marisa e Isabel) foram selecionadas por conveniência de uma turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico com alunos de diferentes anos de escolaridade. A investigadora, primeira autora do artigo, a par da professora da turma, teve um papel participante durante as aulas, questionando as alunas para levá-las a explicitarem formas de raciocínio ou refletir sobre a sua atividade. A recolha e a análise dos dados incidiu: nos registos fotográficos das produções das alunas; nos seus registos; e em notas de campo escritas pela investigadora, durante ou após as aulas, decorrentes da observação. Não houve gravação áudio e vídeo por não termos obtido as autorizações em tempo útil.

Das 11 tarefas implementadas, para este artigo, foram selecionadas a segunda tarefa: *Cortar o quadrado* (DANA, 1987) e a sétima tarefa, *Reprodução de figuras 2D* (adaptado de CLEMENTS; SARAMA, 2009).

Na tarefa *Cortar o quadrado*, os alunos cortaram um quadrado de papel pelas suas diagonais, usando os quatro triângulos para construir figuras diferentes e desenhando as construções na folha da tarefa. Pretendia-se que os alunos fossem estabelecendo algumas relações entre as partes e entre elas e a figura no seu todo. O registo pretendia servir de suporte aos alunos durante a discussão coletiva, permitindo comparar as suas descobertas com as dos colegas. No entanto, o

desafio dos desenhos levou os alunos a procurarem outras relações e, por isso, passaram a ser também objeto de análise.

Na tarefa *Reprodução de figuras 2D*, os alunos reproduziram uma figura a partir de um modelo construído com blocos-padrão, usando esse material e, na segunda parte, reproduziram uma figura a partir de um modelo impresso sem discriminação de cores, usando igualmente blocos-padrão. Com esta tarefa queríamos perceber que relações os alunos identificam nos modelos e de que forma as reproduzem nas suas construções.

Para a análise de dados, considerámos como categorias analíticas a estruturação local e a estruturação global (BATTISTA; CLEMENTS, 1996), usando como indicadores aspetos referentes à composição da trajetória proposta por Clements e Sarama (2014) em cruzamento com aspetos emergentes da análise de dados, como vemos no Quadro 2.

Quadro 2 – Quadro de análise

Estruturação local	Compõe figuras simples, usando tentativa e erro. Escolhe e posiciona peças, atendendo ao seu aspeto global.
	Compõe figuras simples ou partes de figuras complexas com antecipação. Escolhe peças atendendo aos ângulos ou comprimento dos lados. Usa a rotação e a reflexão para escolher a posição das peças.
	Constrói figuras compostas por peças mais pequenas, usando tentativa e erro para estabelecer relações entre as peças, mas sem uma relação muito evidente entre partes e todo.
Estruturação global	Constrói e duplica figuras compostas por peças mais pequenas com antecipação, com relação evidente entre as partes e o todo.
	Constrói e aplica unidades superordenadas com antecipação, com relação entre partes e todo.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Construção

Começamos por apresentar dois exemplos de construções e respetivos desenhos de Isabel e Marisa, para a tarefa *Cortar o quadrado*.

Na primeira situação, Isabel começou por compor um retângulo usando os quatro triângulos, tal como é visível na Figura 1.

Figura 1 - Retângulo composto usando triângulos de papel



Fonte: Material de pesquisa.

Ao desenhar a sua construção (Figura 2), a aluna tenta desenhar os quatro triângulos que compõem o retângulo (registro apagado), agrupando-os e desenhando-os dois a dois tal como se vê na construção. Isabel parece perceber uma relação entre cada par de triângulos, que ainda não consegue evidenciar no desenho, tanto em termos de orientação das peças como em termos de propriedades das peças. No entanto, ao comparar as duas representações, verifica que o seu registro não corresponde à construção e decide apagar. Este procedimento evidencia um processo de reflexão decorrente do estabelecimento de novas relações.

Figura 2 - Desenho do retângulo por Isabel



Fonte: Das autoras.

Reconhecendo depois o retângulo com a ajuda da investigadora, desenha apenas o contorno, parecendo-lhe que dessa forma representar a sua construção. Como também este registro não corresponde à construção por não ter discriminada a forma como os triângulos compunham o retângulo, a investigadora pede-lhe que mostre, no seu desenho, como posicionou os triângulos. A aluna desenha então o triângulo mais à esquerda, hesita, e depois desenha mais três linhas oblíquas, obtendo um registro que evidencia uma relação entre as peças que ainda não é clara, tal como aconteceu no primeiro registro. Para a aluna, estas quatro linhas poderão corresponder aos quatro triângulos que compõem o retângulo, dividindo, no entanto, o retângulo em cinco partes, um triângulo e quatro quadriláteros, sem, contudo, que Isabel se aperceba disso. Aparentemente, Isabel assume estas figuras como triângulos possivelmente devido ao segmento de reta oblíquo que, globalmente poderá sugerir um triângulo. Um outro aspeto interessante do registro apresentado na Figura 2 é que a única representação próxima de triângulo foi desenhada numa posição invertida relativamente à construção com triângulos de papel, mas mais próxima das representações prototípicas. Ou seja, ao representar o triângulo desta forma a aluna poderá estar a mobilizar uma

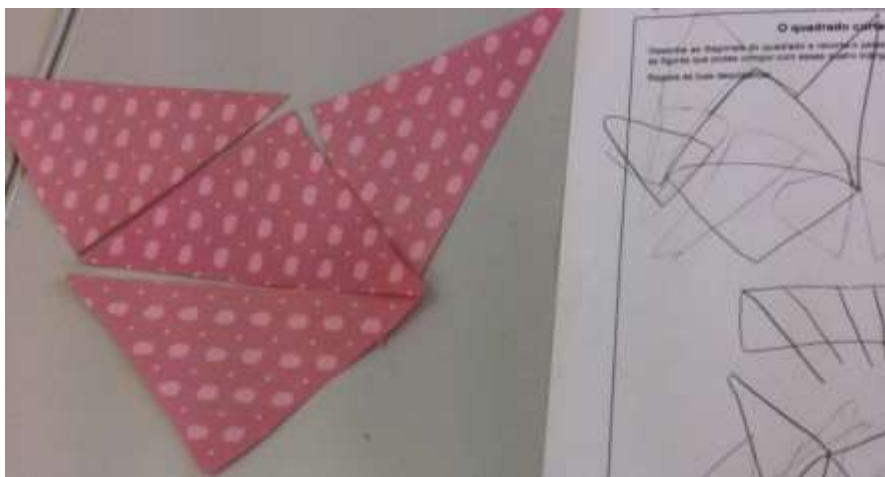
forma de representação do triângulo mais prototípica, tornando-se, por isso, mais fácil de registrar por ser mais familiar para si.

Isabel parece, por um lado, reconhecer a existência dos diferentes componentes e, por outro lado, reconhecer o retângulo como figura global. No entanto, evidencia alguma dificuldade em tornar explícita a relação entre os quatro componentes e o todo quando desenha a figura. Assim, a partir dos quatro triângulos, Isabel não consegue desenhar o retângulo, tal como, tendo como referência o desenho do retângulo, não consegue desenhar as peças de forma a corresponder à construção com os triângulos de papel. Desta forma parece que, para a aluna, a relação entre o todo e as partes ainda não é muito clara, o que poderá estar relacionado com a identificação das propriedades dos triângulos e da sua orientação na composição da figura. Este desempenho a uma estruturação local com apreensão global

A falta de consistência entre a construção que a aluna faz com os triângulos de papel e a forma como desenha essa construção parece assim evidenciar que o facto de ter construído o retângulo, não significa que a figura tenha sido construída por antecipação, ou seja, que a aluna tenha já um modelo mental de como organizar as peças para formar o retângulo. Tendo em conta que a estrutura da figura, relativamente à posição dos triângulos e às relações que podem ser estabelecidas entre estes componentes, ainda não é evidente no desenho, é possível que a aluna tenha chegado à construção do retângulo utilizando como estratégia a tentativa e erro para a colocação das peças.

A imagem seguinte, na Figura 3, mostra uma construção diferente da mesma aluna, na mesma tarefa: o gato.

Figura 3 - Figura construída usando triângulos de papel e respetivo desenho



Fonte: Das autoras.

Na Figura 3, podemos ver que os dois triângulos centrais representados no desenho correspondem aos mesmos triângulos na construção à esquerda. Neste caso, tanto a orientação

como a posição dos triângulos são tidas em conta pela aluna, assim como a correspondência entre os lados congruentes dos triângulos, mas só no caso dos triângulos centrais parece haver uma maior atenção às propriedades do triângulo. A posição prototípica do triângulo de cima pode ter facilitado o seu reconhecimento e o seu registo desenhado. Apesar do triângulo de baixo não estar numa posição prototípica, o facto de ter como referência o triângulo de cima e de partilharem o lado mais comprido pode ter contribuído para o estabelecimento de relações entre estes dois componentes, facilitando a compreensão da figura.

Os triângulos da esquerda e da direita parecem oferecer um grau de desafio maior para o respetivo desenho. O triângulo da direita está numa posição claramente não-prototípica, o que pode tornar a figura de difícil reconhecimento para a aluna, se não estiver a considerar as propriedades das figuras. No entanto, no caso particular desta aluna, ela reconhece a figura e a sua posição e orientação, não atendendo no entanto à congruência dos lados, desenhando assim um triângulo mais pequeno.

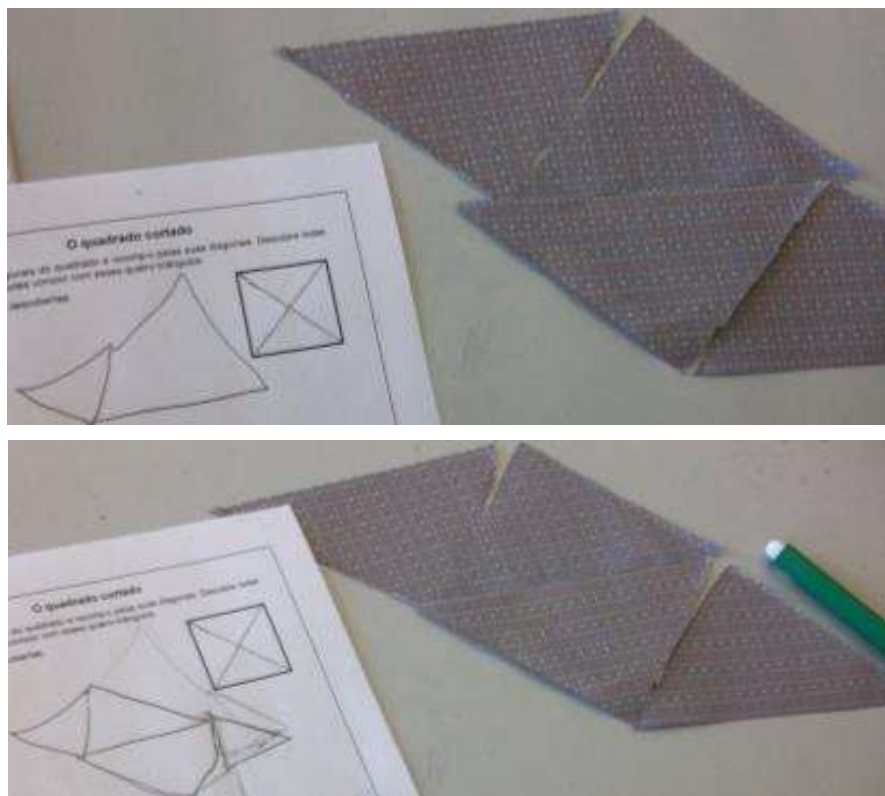
O caso do desenho do triângulo da esquerda parece ser paradigmático. Na construção com os triângulos de papel, este triângulo apresenta a mesma orientação que o triângulo central de baixo, mas Isabel não consegue desenhá-lo como fez com o de baixo, embora tivesse considerado algumas das suas propriedades. A aluna parece ter em conta a orientação da figura, o que é visível pelo vértice apontado para baixo. A parte interna parece corresponder ao ângulo reto da construção. No entanto, não foram considerados aspetos importantes como a medida dos lados e a congruência entre os quatro triângulos e entre lados dos triângulos.

O significado atribuído pela aluna à sua construção pode tê-la levado a focar-se num desenho que também parecesse um gato, desenhando assim as “orelhas” numa posição oblíqua sem, aparentemente, reparar que a "orelha" da esquerda poderia ser obtida pela translação do triângulo central de baixo. Ou seja, parece haver um foco no aspeto global das figuras e não tanto nas suas propriedades. Outro aspeto que pode ter dificultado este desenho está relacionado com o facto de o lado partilhado entre o triângulo à esquerda e o triângulo central de cima não ser o mais comprido e estar numa posição oblíqua. A falta deste tipo de referências, nesta parte da construção, pode ter tornado o desenho mais desafiante para a aluna.

Nesta segunda construção, a aluna evidencia um nível de estruturação mais elevado quando comparado com o primeiro exemplo, já que, neste caso, apesar de considerar a figura no seu todo, já reconhece alguns componentes e o estabelece de relações entre esses componentes. A aluna evidencia assim uma estruturação local, conseguindo compor partes de figuras mais complexas, embora as relações que estabelece sejam ainda pouco consistentes e, por isso, ainda não consegue estabelecer relações entre os componentes da figura e o todo.

Na figura 4, são apresentadas duas imagens que correspondem aos processos de construir e de desenhar utilizados por Marisa.

Figura 4 - Construção, tentativa de registo e desenho final do paralelogramo, por Marisa



Fonte: Das autoras.

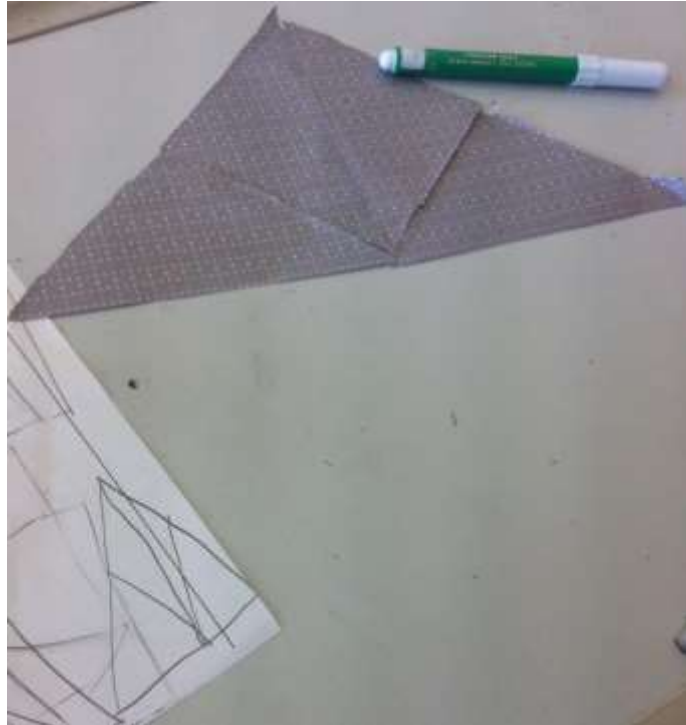
A primeira imagem apresenta uma primeira tentativa de Marisa de desenhar a sua construção. Começar pelo triângulo mais à esquerda, onde parece haver uma atenção ao desenho do ângulo reto, seguindo depois para o triângulo central de cima, acabando por desenhar um quadrilátero, provavelmente na tentativa de fazer corresponder os dois lados das duas figuras. A investigadora pede à aluna que compare a posição do triângulo que está a desenhar com o que já tinha desenhado, focando-se nos pontos onde começam ou acabam os lados do triângulo. Percebendo que o desenho não corresponde à construção, a aluna apaga e refaz o desenho, conseguindo então desenhar uma representação mais fidedigna.

Embora a construção levantasse alguma dificuldade à aluna, o processo de reflexão emergente da comparação entre a construção e o desenho permite-lhe estabelecer relações espaciais adequadas, nomeadamente entre os triângulos do meio. A localização dos dois triângulos laterais parece respeitar quer a localização das peças quer a congruência dos lados, evidenciando assim que esta aluna consegue ter em conta aspetos relativos às propriedades das figuras que fazem parte da

composição. Os desenhos dos triângulos denotam ainda alguma preocupação relativamente aos ângulos retos e agudos dos triângulos.

A Figura 5 mostra uma outra composição, um triângulo, e o respetivo registo de Marisa.

Figura 5 - Construção do triângulo e respetivo desenho, por Marisa



Fonte: Das autoras.

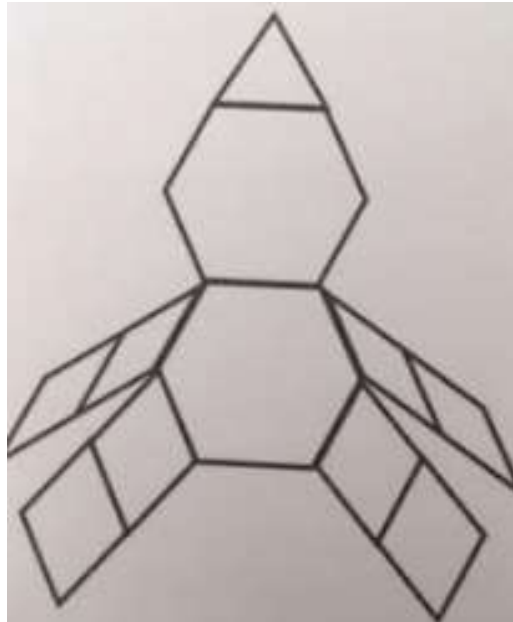
Embora o desenho não seja uma representação rigorosa, o registo aqui apresentado mostra o estabelecimento de relações adequadas entre as diferentes partes que compõem a construção. Tanto a posição como a orientação dos triângulos foram respeitadas, assim como a correspondência dos lados congruentes. A parte central parece ser a mais fácil de compor com as peças, mas o seu desenho apresenta o desafio da posição oblíqua, não-prototípica, dos ângulos retos, sendo que Marisa desenhou ângulos obtusos, parecendo resultar mais num losango do que num quadrado.

Marisa mostra assim conseguir estabelecer relações espaciais adequadas, associadas a uma estruturação global, que se revelam consistentes entre a construção com os triângulos de papel e o seu registo.

Reprodução de figuras

Na tarefa, *Reprodução de figuras 2D*, os alunos reproduzem uma figura construída em blocos-padrão, usando o mesmo material, que não gerou dificuldade, e, de seguida, reproduzem outra figura, a partir de uma imagem sem discriminação de cores, visível na Figura 6.

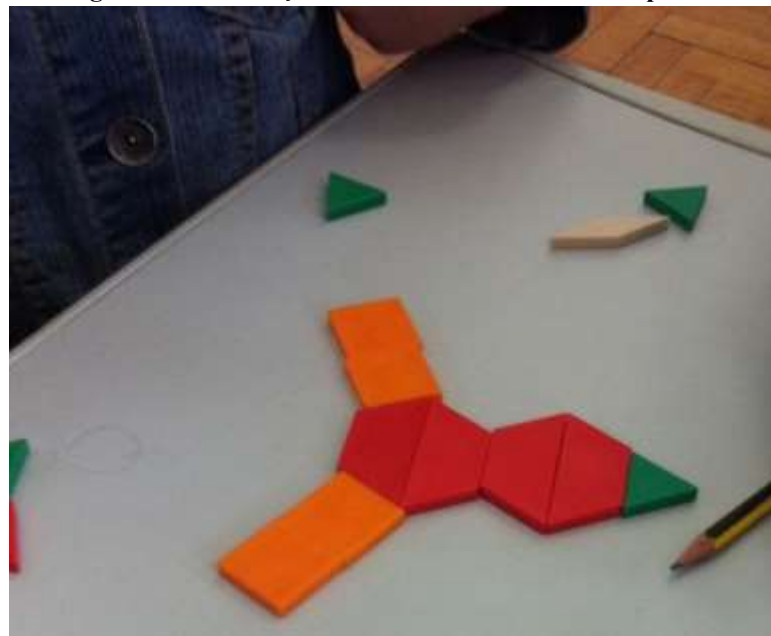
Figura 6 – Modelo para construção 2D



Fonte: Das autoras.

Começamos por apresentar a construção inicial de Isabel, com unidades compostas.

Figura 7 – Construção de Isabel com unidades compostas.



Fonte: Das autoras.

Verificamos que esta aluna mobiliza conhecimentos respeitantes à decomposição do hexágono, trabalhados numa tarefa anterior, mostrando que compreende a equivalência entre o hexágono e os dois trapézios. Posteriormente substitui os quatro trapézios por dois hexágonos.

A Figura 8 mostra a construção de Isabel, reformulada.

Figura 8 – Construção de Isabel



Fonte: Das autoras.

Ao usar os hexágonos, a aluna engana-se na contagem, facto que associamos a uma apreensão global da figura. Como tal não se verificou quando Isabel usou os trapézios, assumimos que a aluna reproduz a figura por tentativa e erro. Na mesma construção, a utilização de quadrados em vez dos losangos, pode também estar associada a uma perceção global da figura, onde associa os quatro lados do losango aos do quadrado, sem atender aos diferentes tipos de ângulos.

Esta dificuldade, evidenciada também por Marisa, parece estar associada ao facto das figuras estarem inseridas numa construção. Ao ver a peça isolada do conjunto, Marisa conseguiu perceber a diferença, tendo verbalizado: “As peças enganaram-nos” e “Nós pensámos que eram quadrados e depois pensámos e eram estas (*losangos*)”. A confusão entre quadrado e losango pode estar associada à perceção global da figura, mas o facto de estar inserido numa construção pode ter dificultado a discriminação de propriedades. Marisa, ao descrever o losango, associa-o a outras figuras:

Marisa: - Tem umas partes azuis que parecem um triângulo.

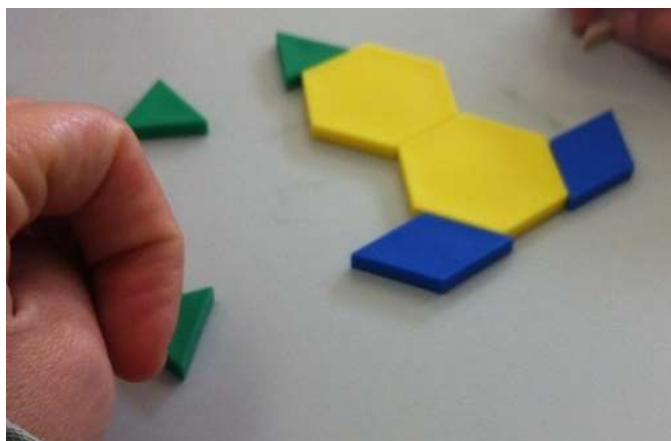
Inv: - Sim...

Marisa: - Acho que são um triângulo (*separa a peça da construção*), mas um pouco do quadrado.”

Percebemos que há uma associação ao triângulo, possivelmente pelos ângulos agudos, e ao quadrado, pelos quatro lados, que Marisa só consegue perceber quando isola a peça da restante construção, tornando evidentes alguns componentes. Por não ser uma figura comum no trabalho dos primeiros anos, o losango revela-se uma figura desafiante.

Apresentamos duas fases da construção de Marisa, onde a orientação e posição das peças foram aspetos constrangedores. A Figura 9 mostra uma orientação adequada dos hexágonos, o que não se verifica com os losangos.

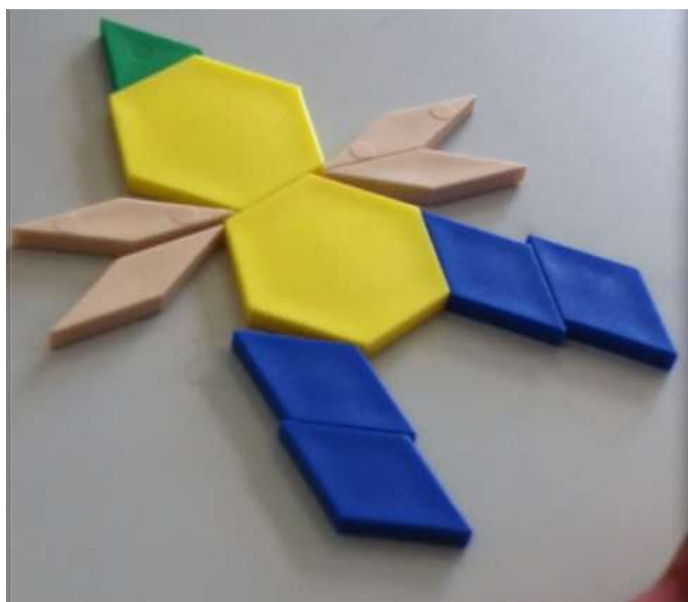
Figura 9 – Dificuldade de Marisa na orientação dos losangos.



Fonte: Das autoras.

Marisa consegue perceber a diferença sozinha, possivelmente por comparação das duas representações, e reformula a sua construção. No entanto, na composição dos braços, Marisa volta a sentir dificuldade, desta vez na posição das peças, como vemos na Figura 10.

Figura 10 – Dificuldade de Marisa na posição dos losangos.



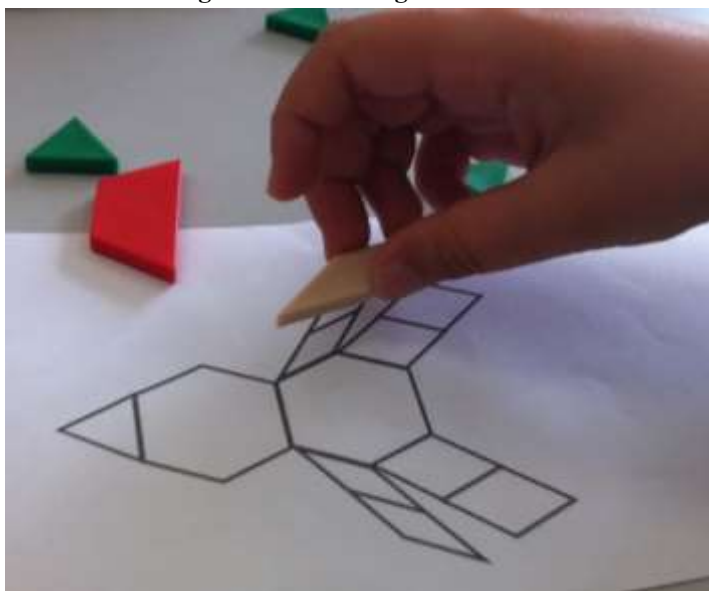
Fonte: Das autoras.

Marisa reconhece que os losangos estão unidos por lados congruentes e que um está mais acima, mas não usa os ângulos para determinar a posição dos losangos entre si. Também não parece relacionar as partes, os dois losangos, com o todo, a figura formada por eles. O mesmo se verifica na construção de Isabel, exibida na Figura 8.

Na tentativa de identificar corretamente as peças e a sua posição, Marisa usa como estratégia a sobreposição das peças ao modelo, como vemos na Figura 11.

Erro! Fonte de referência não encontrada.

Figura 11 – Estratégia de Marisa



Fonte: Das autoras.

Nesta situação, Marisa recorre ao modelo para identificar ou validar as peças e a sua posição, fazendo corresponder cada parte da peça ao modelo.

Discussão

Na primeira tarefa, Marisa e Isabel, utilizaram diferentes estratégias para a composição das suas construções. Uma estratégia que parece facilitar as construções das alunas é a utilização de figuras com orientações prototípicas (CLEMENTS et al., 1999) como referência para a colocação de outras figuras em posições menos familiares. Ambas as alunas atenderam as aspetos particulares dos triângulos nas suas construções como o comprimento dos lados, embora esse aspeto fosse por vezes substituído, nos desenhos, pelo registo do seu aspeto global, associado a um significado que as alunas reconhecem na construção. Para além dos comprimentos dos lados, tanto Isabel como Marisa parecem ter tido em conta os ângulos das figuras, notando-se alguma congruência entre os ângulos correspondentes, nas construções e nos registos.

Isabel e Marisa evidenciaram uma estruturação local, que foi progredindo ao longo da tarefa, e Marisa parece chegar mesmo a uma estruturação global. O desenho das construções parece ter potenciado o nível de estruturação das alunas, levando-as a um olhar mais aprofundado para as figuras, em busca de novas relações, tal como referido por Thom e McGarvey (2015). Embora desenhar possa trazer constrangimentos, a comparação entre desenhos e construções possibilitou a reflexão sobre aspetos não coincidentes, relacionados com propriedades das figuras, levando-as a reformular os desenhos com base em novas relações. Como referem Thom e McGarvey (2015,

p.472), “o ato de desenhar e o desenho possuem o potencial de estimular o pensamento de uma pessoa ou pessoas ao trabalhar a Matemática mas também dos outros através do seu envolvimento”.

Relativamente à segunda tarefa, Marisa e Isabel, pareceram estar usar a apreensão global, com uma progressiva atenção a aspetos particulares. A congruência dos lados foi uma estratégia bastante utilizada pelas alunas, o que não se verificou tanto relativamente aos ângulos. A substituição de peças por conjuntos equivalentes revela a mobilização de relações entre todo e partes, ainda de uma forma muito limitada.

A falta de um modelo de estruturação para a construção levou a que surgissem sobretudo três tipos de erros: contagem, posição e orientação de componentes. Os erros de contagem são associados por Battista et al. (1998) à falta de estruturação do objeto. Os erros na posição e na localização de peças parecem estar ligados à falta de relações entre a parte e o todo seja de peças particulares e seus componentes seja da relação dessas peças com um conjunto maior.

Os losangos, tal como os triângulos, constituíram-se como figuras desafiantes para as alunas, o que poderá estar associado ao facto de serem figuras pouco trabalhadas com os alunos, nos anos iniciais. Por outro lado, a posição relativa das peças quando inseridas numa construção maior parece comprometer a capacidade das alunas de identificarem atributos e propriedades dessas peças.

A reprodução de figuras parece ser mais exigente do que a construção livre de figuras, na medida em que requer que as alunas tenham já alguns modelos mentais que lhes permitam analisar a estrutura de figuras mais complexas. Isto envolve as operações de coordenação, ao implicar a coordenação de diferentes compostos na construção, e integração (BATTISTA; CLEMENTS, 1996), por mobilizar modelos mentais representativos da estrutura dos objetos.

Notamos que o desempenho das alunas não só não é linear entre diferentes tarefas como dentro da mesma tarefa, influenciado pelo tipo e familiarização com as peças utilizadas e por modelos mentais prévios. Estes fatores estão particularmente ligados à antecipação, associada a níveis que implicam um grau de abstração maior.

O significado atribuído às construções pode condicionar a sua estruturação, levando as alunas a atender a aspetos diferentes. Para a Isabel, no caso do retângulo, a dificuldade associada à discriminação das peças parece estar relacionada com a própria natureza do retângulo que é, normalmente, apresentado sem qualquer registo no interior. O mesmo não se verificou na construção do gato, que por ter um significado associado a cada uma das partes, essa discriminação e o estabelecimento de algumas relações pareceu facilitar a estruturação que a aluna fez da figura.

A presença de diferentes níveis de estruturação inferida na análise dos dados, vai ao encontro da ideia de permeabilidade entre níveis de raciocínio (LEHRER; JENKINS; OSANA, 1998), não podendo o processo de estruturação ser assumido como linear.

Conclusão

A partir deste estudo podemos concluir que as alunas utilizam estratégias ligadas a uma estruturação local, atendendo em especial ao comprimento dos lados das figuras, mas com um desempenho mais oscilante no que respeita à atenção aos ângulos. A apreensão global das figuras ou a utilização de figuras em posição prototípica parecem constituir estratégias associadas à familiaridade que as alunas têm com essas mesmas figuras.

Podemos acrescentar que os níveis de estruturação, neste estudo, pareceram ser condicionados pela complexidade e pela familiaridade que as alunas têm com uma determinada figura.

Relativamente aos desenhos, estes parecem proporcionar condições para levar as alunas a refletir sobre a correspondência de representações diferentes do mesmo objeto, sendo que, para isso, tem de estabelecer relações entre partes correspondentes das duas representações.

Apontamos como limitações a fase inicial desta investigação e a falta de registo áudio e vídeo que poderiam trazer dados que permitissem aprofundar a análise das resoluções das alunas.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

- BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, Reston, VA: NCTM, p. 843-909, 2007.
- BATTISTA, M. T. Development of the shape makers' geometry microworld. In G. W. Blume, M. K. Heid (Eds.), **Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives**, v. 2, p. 131–56, Charlotte: Information Age, 2008.
- BATTISTA, M. T. **Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning**, Portsmouth, NH: Heinemann, 2012.
- BATTISTA, M.T. & CLEMENTS, D. Students' understandings of three-dimensional rectangular arrays of cubes, **Journal for Research in Mathematics Education**, v.27, 3, 258–292, 1996.
- BATTISTA, M.T., CLEMENTS, D.H., ARNOFF, J., BATTISTA, K., & BORROW, C. Students' spatial structuring of 2D arrays of squares, **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 9, 5, p. 503–532, 1998.
- BOGDAN, R., & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto: Porto Editora, 1994. (Obra original em inglês publicada em 1991)
- CLEMENTS, D. H., & SARAMA, J. **Learning and teaching early math: The learning trajectories approach**, New York and London: Routledge, 2014.

- CLEMENTS, D., SWAMINATHAN, S., HANNIBAL, M.A. & SARAMA, J. Young children concepts of shape, **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, 2, p. 192–212, 1999.
- COBB, P. & GRAVEMEIJER, K. Experimenting to support learning and understand learning processes. In Kelly, A. E., Lesh, R.A. & Baek J. Y. (Eds), **Handbook of Design Research methods in Education**, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 68-95, 2008.
- DANA, M. E. Geometry-A square deal for elementary school. In M. M. Lindquist e A.P. Shulte (Eds) **Learning and Teaching Geometry, K- 12 (1987 Yearbook)**, Reston, VA: NCTM, p. 113–125, 1987.
- LEHRER, R., JENKINS, M., & OSANA, H. Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry, In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), **Designing learning environments for developing understanding of geometry and space** Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 137–167, 1998.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**, Reston, VA: NCTM, 2000.
- THOM, J. S., & MCGARVEY, L. M. The act and artifact of drawing (s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings, **ZDM**, v. 47, 3, p. 465–481, 2015.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & BUYS, K. **Young Children Learn Measurement and Geometry**, TAL Project, Freudenthal Institute, Utrecht University, National Institute for Curriculum Development, 2005.
- VON GLASERSFELD, E. Abstraction, re-presentation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach, In **Epistemological foundations of mathematical experience**, Springer, New York, NY, p. 45-67, 1991.

Submetido em outubro de 2018
Aprovado em dezembro de 2018