 http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2018.016

A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano

Cristina Morais
Externato da Luz; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
cristina.morais@campus.ul.pt

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo
Este artigo tem como objetivo analisar como alunos do 1.º ciclo compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações. O estudo decorre de uma Investigação Baseada em Design em que foi realizada uma intervenção numa turma do 1.º ciclo do ensino básico com 25 alunos, iniciada no 3.º ano de escolaridade e continuada no 4.º ano, de uma escola situada em Lisboa. Os processos de recolha de dados foram gravação vídeo e áudio das aulas, recolha do trabalho escrito dos alunos e notas de campo. É analisado o trabalho realizado pelos alunos em diferentes momentos da intervenção ao longo dos dois anos de escolaridade e numa entrevista individual realizada no final da intervenção. Os resultados mostram a importância das representações icónicas no apoio aos processos de reunitização explicitando a relação entre as unidades de modo a promover o prolongamento da estrutura decimal aos números racionais. Também o uso das representações simbólicas, em particular a percentagem, foi fundamental. Revelam ainda que, numa fase posterior, os alunos usam a estrutura decimal para realizarem transformações entre diferentes representações de número racional. Esta relação constante entre representações contribuiu não apenas para dar significado ao numeral decimal, mas também para uma compreensão global de número racional.

Palavras-chave: Números racionais. Numerais decimais. Estrutura decimal. Representações.

The understanding of the structure of the decimal number representation of rational number by grade 3 and 4 students

Abstract
This paper aims to analyze how elementary school students understand the underlying structure of the decimal number representation of rational numbers and its relation with other representations. This study stems from a Design Based Research, within which an intervention was carried out in an elementary school class of 25 students and their teacher, that started in grade 3 and was continued in grade 4, from a school located in Lisboa. The processes of data collection were video and audio recording of the lessons, collection of students' written work and field notes. The analysis centers

on different episodes of students' work during the intervention along the two school years and in an individual interview carried out at the end of the intervention. The results show the importance of iconic representations in supporting reunitization processes, making explicit the relation between the units, and thus promoting the extension of the decimal structure to the rational numbers. Also, the use of symbolic representations, in particular, the percentage, was crucial. The results also show that, at a later stage, the students use the decimal structure to make transformations among different representations of rational numbers. This constant relation among representations contributed not only to give meaning to decimal numbers, but also to a global understanding of rational numbers.

Keywords: Rational numbers. Decimal numbers. Decimal structure. Representations.

Introdução

Os desafios que emergem da aprendizagem inicial dos números racionais não negativos [1] contribuem para a ampliação do conceito de número dos alunos (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011) que envolve, entre outros aspetos, a interpretação de novas configurações simbólicas usadas para representar os números pertencentes a um conjunto numérico até então desconhecido. Nesta fase inicial, é particularmente importante atender ao facto de as representações de número racional não traduzirem de forma transparente o número representado (MOSS; CASE, 1999), o que significa que é necessário um entendimento da estrutura inerente à representação para esta se tornar inteligível para os alunos (PONTE; SERRAZINA, 2000).

A representação de números racionais de acordo com o sistema de numeração decimal, utilizando vírgula ou ponto, designada por numeral decimal[2], segue as convenções do sistema de numeração usado com números inteiros[3]. Contudo, e apesar da familiaridade com a estrutura decimal subjacente a esta representação, a compreensão de numeral decimal não é imediata nem evidente para os alunos (HIEBERT, 1992). As dificuldades que alunos de várias faixas etárias mostram no trabalho com numerais decimais, identificadas em diversas investigações, são reveladoras da complexidade inerente à compreensão de número racional nesta representação (DURKIN; RITTLE-JONHSON, 2015; STEINLE, STACEY, 1998; RESNICK; NESHER; LEONARD; MAGONE; OMANSON; PELED, 1989; VAMVAKOUSSI; VAN DOOREN; VERSCHAFFEL, 2012). O facto de os alunos considerarem que 0,27 representa um número de grandeza superior a 0,4 porque 27 é superior a 4, ou igualarem 6,02 a 6,2 por considerarem que zero

[1] Ao longo do artigo, referimo-nos a "números racionais" considerando números racionais não negativos.
[2] No artigo, usamos a expressão "numeral decimal" para designar esta representação.
[3] Ao longo do artigo, referimo-nos a "números inteiros" considerando números inteiros não negativos.

não assume qualquer valor, evidencia não só fragilidades no entendimento da estrutura decimal subjacente ao numeral decimal, como na própria compreensão dos números representados.

Acreditamos que para compreender numeral decimal, não só é essencial o entendimento da estrutura subjacente, como também é necessário estabelecer relações entre numeral decimal e outras representações (LACHANCE; CONFREY, 2002). Assim, neste artigo, procuramos perceber como alunos do 1.º ciclo (6-10 anos) compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações.

Compreender numeral decimal

O sistema de numeração decimal subjacente à representação em numeral decimal é um sistema poderoso, permitindo escrever de forma elegante o que seria uma expressão matemática complexa (PONTE; SERRAZINA, 2000). Por exemplo, a expressão $8 \times 10^1+4 \times 10^0+1 \times 10^{-1}+5 \times 10^{-2}$, simplificada na representação 84,15, evidencia a noção de base 10, nas diferentes unidades criadas a partir de agrupamentos constituídos por 10 elementos, bem como de valor de posição assumido pelos algarismos que representam cada um dos agrupamentos de base 10, ligados por relações multiplicativas e aditivas. Para melhor se perceber o desafio que o entendimento desta estrutura coloca aos alunos, centramo-nos na conceptualização da unidade, essencial na própria compreensão de número racional (BEHR; HAREL; POST; LESH, 1992; MONTEIRO; PINTO, 2005).

O desenvolvimento da conceptualização da unidade implica processos de partição, unitização e reunitização[4]. Para salientar a importância destes processos, comecemos por considerar um todo, a unidade, que pretendemos dividir em cem partes. A partição, capacidade essencial para ancorar a compreensão de número racional (LAMON, 1996; STREEFLAND, 1991), é convocada para dividir a unidade em cem partes que têm que ser iguais.

Gerada uma quantidade através do processo de partição, neste caso cem partes iguais correspondentes a cem centésimas, podemos agora pensá-la de modo diferente, dependendo da unidade de medida escolhida, compondo ou recompondo as partes obtidas de modo a obter o todo inicial, isto é, unitizando ou reunitizando (BATURO, 2004). A mesma quantidade pode ser unitizada como 1 (o todo), como 10 se tomarmos como unidade de medida um grupo de 10 das cem partes iniciais (10×10), como 2 tomando como unidade de medida um grupo de 50 (2×50), entre outras possibilidades. A capacidade de formar e trabalhar com unidades de medida

[4] Em inglês *partitioning, unitizing* e *reunitizing* respetivamente.

progressivamente mais complexas pode levar a raciocínios cada vez mais sofisticados e poderosos (LAMON, 1996), uma vez que a capacidade de considerar unidades de medida diferentes para um mesmo todo implica um entendimento da relação entre estas duas entidades.

A reunitização envolve a mudança de unidade a par da noção de conservação do número, sendo por isso um processo bastante exigente no trabalho com números racionais (BATURO, 2000). É um processo particularmente importante para a compreensão do sistema de numeração decimal. Neste sentido, assinalamos três tipos de estratégias de reunitização identificadas por Baturo (2000): partição, agrupamento e reagrupamento.

A partição, tal como referido anteriormente, envolve a divisão da unidade considerada, e é agora mobilizada para gerar unidades menores. Por exemplo, 8 décimas podem ser reunitizadas em 80 centésimas. É este tipo de reunitização que fazemos quando transformamos as unidades da esquerda para a direita do numeral, sendo cada uma das unidades transformadas 10× menor que a unidade posicionada imediatamente à sua esquerda.

Inversamente, através da estratégia de agrupamento são formados grupos de unidades maiores, gerando-se unidades maiores. Este tipo de estratégia é usado, por exemplo, na reunitização de 50 centésimas em 5 décimas, ou seja, é o processo subjacente a uma leitura da direita para a esquerda de um numeral, em que cada unidade resulta da divisão por 10 da unidade imediatamente à sua direita.

O reconhecimento de que podem ser criadas unidades que resultam do agrupamento de 10 elementos ou originar 10 unidades menores que resultam da partição de uma unidade maior envolve a noção de base bem como a noção de valor de posição (HIEBERT, 1992; PONTE; SERRAZINA, 2000). Ambas são fundamentais no terceiro tipo de estratégia de reunitização que diz respeito ao reagrupamento através de composições de unidades, considerado o tipo de estratégia mais complexo (BATURO; COOPER, 2000). Baturo (2000) identifica reagrupamentos envolvendo relações aditivas, como por exemplo a reunitização de 6 décimas como 5 décimas+10 centésimas, que pode tornar-se bastante vantajosa em determinados contextos, nomeadamente em situações de cálculo.

Neste tipo de estratégia incluímos também as que envolvem relações multiplicativas, como pensar em 25 centésimas como um quarto de uma décima $\left(0{,}25 = \frac{1}{4} \times 0{,}1\right)$. Neste tipo de composição, a quantidade associada ao número é reagrupada como parte de uma unidade também ela reconceptualizada, implicando a possibilidade de serem criadas unidades progressivamente menores e, consequentemente, a construção da propriedade densidade. O reconhecimento desta propriedade do conjunto dos números racionais, não partilhada pelo conjunto dos números inteiros, representa uma mudança significativa no conceito de número (SIEGLER et al., 2011).

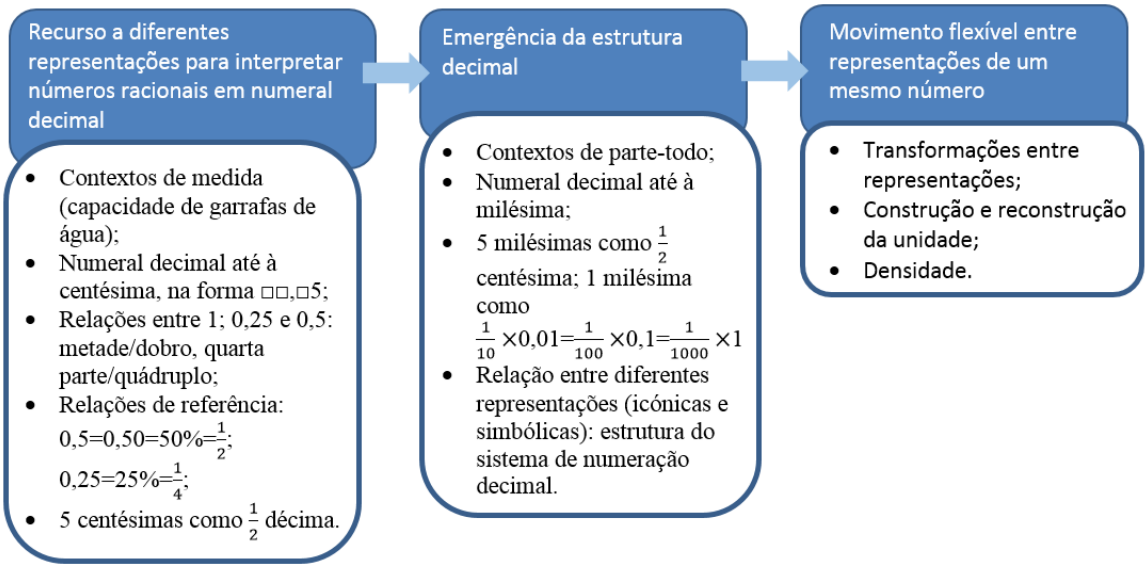
Lachance e Confrey (2002, p. 506) sublinham que para "compreender verdadeiramente numerais decimais" é necessário compreender as relações entre numeral decimal, fração e percentagem e que, sem este entendimento, apenas se desenvolvem ideias superficiais sobre cada uma das representações. Só com a compreensão do que está a ser representado é que a representação tem sentido para quem a usa e se transforma em ferramenta para pensar (NCTM, 2007; PONTE; SERRAZINA, 2000). A estrutura decimal pode constituir-se como ponte entre representações, possibilitando a representação de número racional em numeral decimal, em fração com denominador correspondente a potências de base 10, como também em percentagem (BROCARDO, 2010). O uso de diferentes representações é considerado basilar para a compreensão de número racional (e.g., POST; CRAMER; BEHR; LESH; HAREL, 1993), uma vez que promove um entendimento integrado de número racional (MOSS; CASE, 1999; TRIPATHI, 2008), podendo ser desenvolvido a partir do momento em que os alunos começam a explorar este conjunto numérico (MOSS; CASE, 1999).

Metodologia

Neste texto reportamos parte de um estudo mais alargado que seguiu a modalidade de Investigação Baseada em Design (PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016) tendo sido realizado o que Cobb, Jackson e Dunlap (2016) designam por *classroom design study*, uma vez que se trata de uma investigação realizada em sala de aula e centrada em processos de aprendizagem.

Foi delineada uma intervenção para a construção da compreensão de número racional, enfatizando a representação em numeral decimal, considerando que os alunos tinham trabalhado anteriormente com números racionais em fração, maioritariamente frações unitárias, com um significado parte-todo. Neste percurso identificamos três grandes etapas, cujas ideias-chave destacamos na Figura 1.

Figura 1 – Percurso de aprendizagem delineado



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Os participantes foram 25 alunos de uma escola de Lisboa (Portugal), a professora da turma bem como a investigadora (primeira autora). A intervenção teve lugar no 3.º ano[5] e 4.º ano. As tarefas foram resolvidas em aulas de 90 minutos, uma vez por semana, perfazendo um total de 16 semanas nos dois anos letivos. A maior parte das aulas foi organizada em três momentos distintos: lançamento da tarefa, resolução em pequenos grupos e discussão coletiva (PONTE, 2005). A investigadora interveio nestes momentos sempre que considerou pertinente. No final da intervenção, foi realizada pela primeira autora uma entrevista individual a alguns alunos da turma, que contemplou tarefas de de representação, comparação e ordenação de números racionais, focando a representação em numeral decimal.

A recolha de dados foi feita por gravação vídeo e áudio das aulas e da entrevista, recolha do trabalho escrito dos alunos, bem como registo de notas de campo da investigadora. Nos dados apresentados neste artigo, os alunos são identificados com nomes fictícios, garantindo o seu anonimato. No processo de análise de dados, as gravações áudio foram transcritas e complementadas com informação recolhida com o visionamento das gravações vídeo, registos dos alunos e notas da investigadora. Os dados foram analisados considerando os processos envolvidos na conceptualização de unidade, em particular os tipos de estratégias de reunitização usadas pelos alunos; e as representações convocadas no trabalho com numerais decimais.

[5] Alunos com idade média de 8 anos.

Resultados

Analisamos episódios ocorridos em momentos de resolução de tarefas em pequenos grupos ou em momentos de discussão coletiva. São organizados em três secções: na primeira apresentamos um episódio que ilustra como os alunos procuraram atribuir significado ao numeral decimal recorrendo a outras representações; os episódios da segunda secção procuram evidenciar a emergência da estrutura decimal; e, por fim, a última secção reúne episódios que ilustram um trabalho flexível com numeral decimal, envolvendo outras representações de número racional.

Atribuindo significado ao numeral decimal

Na primeira tarefa da intervenção, realizada no 3.º ano, foi pedido aos alunos que estabelecessem relações entre as capacidades de três garrafas de água, de 1 *l*, 0,5 *l* e 0,25 *l*, que se encontravam com o rótulo tapado. Para o fazer, podiam encher e vazar as garrafas, e usar um marcador para traçar o nível da água em cada garrafa se necessário. Após esta primeira fase da tarefa, foi pedido que associassem uma etiqueta a cada garrafa de água, identificando a sua capacidade. Os alunos estavam organizados em grupos e a todos foram distribuídas as etiquetas "0,25 *l*" e "1 *l*", a metade dos grupos uma etiqueta com a representação "0,5 *l*" e a outra metade tinha "0,50 *l*".

Os grupos com a etiqueta "0,5 *l*" interpretaram os numerais decimais como números inteiros, associando "1 *l*" à garrafa de maior capacidade, "0,25 *l*" à garrafa média e "0,5 *l*" à garrafa de menor capacidade, considerando que 25 seria superior a 5. No momento de discussão coletiva, alunos que tinham a etiqueta "0,50 *l*" partilharam como a tinham relacionado com "0,25 *l*" recorrendo de forma espontânea à representação em percentagem:

> António: Porque um litro é 100 . . . É 100 por cento.
> Investigadora (I): OK, boa. Então metade...
> António: Dá cinquenta por cento.
> Fábio: Depois metade dos cinquenta por cento será vinte e cinco por cento.

Os alunos recorreram à percentagem para interpretar os números expressos em numeral decimal. Estabeleceram a unidade como 100 (%), interpretando 0,50 como 50 (%), logo, como metade de 100. De seguida, transformaram 0,25 em 25 (%), o que possibilitou a sua interpretação como metade de 50. Assim, com base em relações estabelecidas entre percentagens, fortemente apoiadas nas relações entre os números inteiros que constituem as componentes numéricas da representação em percentagem, os alunos concluíram que 0,25 seria metade de 0,50.

Para vários alunos 0,5 e 0,50 eram representações de números diferentes. Contudo, Rute e Tomás consideraram ambos equivalentes:

> Rute: Porque cinquenta é metade de cem.

Tomás: Porque cinquenta é metade de cem e o cinco é metade de dez.

Recorrendo de novo a números inteiros, os alunos estabeleceram a razão entre 5 e 10, e entre 50 e 100, identificando a proporção entre as razões como metade. Para evidenciar a relação entre estas afirmações e a partição da unidade dividida em 10 ou em 100 partes iguais, a investigadora fez a leitura dos numerais:

I: . . . Vou dizer outra vez uma coisa que tu disseste: porque cinco é metade de dez e cinquenta é metade de cem. Eu vou repetir o nome que eu dei, como eu li: cinco décimas e tu disseste que cinco é metade de dez, e este eu li cinquenta centésimas.
Rute: Ah! Décimas é de dez e centésimas é de...
Rute e Bárbara: De cem!
. . .
Vários alunos: E a décima vem de dez.

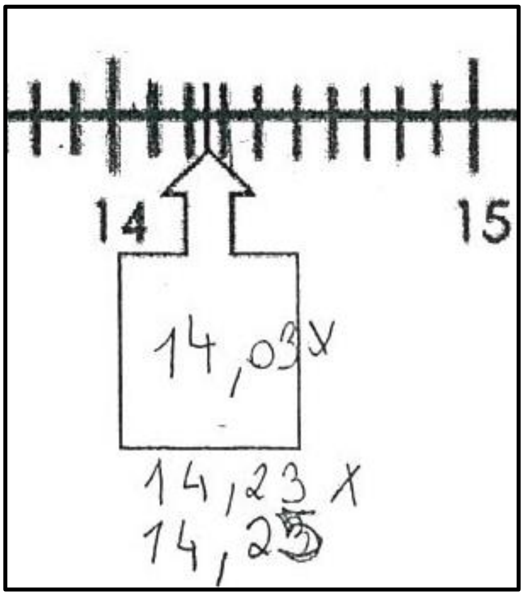
Para os alunos não foi evidente a relação entre unidade e o número de partes em que esta se encontrava dividida. Contudo, a sua associação à leitura dos numerais e à representação em percentagem permitiu começar a suscitar a reunitização de 1 como 10 décimas e 100 centésimas.

Estendendo a estrutura decimal

Após a exploração em torno do modelo da reta numérica, graduada em décimas, foi realizada uma tarefa que incluía a representação de números localizados na reta. Centramos a análise na representação do número 14,25 na reta numérica.

Matilde representou o número como 14,03 e, de seguida, como 14,23 (Figura 2).

Figura 2 – Registo de Matilde na Questão 2 da tarefa "Localização de números na reta numérica"



Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

A aluna explicou que representou inicialmente 14,03 porque contou três traços na reta numérica, após as 14 unidades. Esta representação inicial mostra que reconhece a parte inteira do numeral à qual procura acrescentar a parte não inteira, mas, não evidencia nem o reconhecimento das unidades que constituem essa parte não inteira nem a relação existente entre as unidades. Contudo, alterou depois o registo para 14,23, explicando:

> Matilde: . . . porque aqui estava do lado do dois, vinte e três porque está entre o dois e o três.

Pareceu ter reconhecido alguma diferença entre as unidades que compõem a parte não inteira do numeral. Identificou 2 como unidade menor que 1 posicionando o algarismo dois na unidade das décimas. Uma vez que o número se encontrava localizado entre duas e três décimas, compôs o número como 14,23. Não é claro se a aluna identificou o valor de posição de 2 enquanto duas décimas, contudo, parece evidente que não reunitizou por partição 1 décima em 10 centésimas. Contudo, o registo que fez mostra que Matilde reconhece que as unidades que compõem o numeral tornam-se menores à medida que o lê da esquerda para a direita.

Outros alunos, como André e Dinis, evidenciaram um reconhecimento do número a representar, contudo, a dúvida no seu registo estava associado às convenções do sistema de numeração decimal:

> André: Cristina, nós tivemos aqui uma pequena dúvida. Eu mais ou menos tinha aqui uma pequena dúvida. Como catorze... Ele estava ali no meio . . . e então eu fiquei com a pergunta se era dois zero cinco ou era dois cinco, porque estão aqui duas décimas...
> Dinis: É por isso que é dois zero cinco.
> André: E depois como está ali no meio... Então e o dois? Que são as duas décimas?
> I: O dois são as duas décimas, tens razão. Há duas décimas completas.
> André: E então é assim, não é? (Escreve 14,25) Eu estava um bocado confuso com o zero cinco...

Apoiando-se na reta numérica, André pareceu ter reunitizado o número por reagrupamento como 14 unidades + 2 décimas + “metade do espaço” compreendido entre duas décimas. Ao compor o número, identificou claramente 14 unidades e 2 décimas, contudo, pareceu associar 0,5 à parte situada entre décimas, ficando indeciso entre as representações 14,25 e 14,205, o que evidencia a emergência da noção de valor de posição.

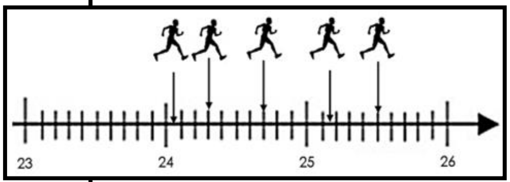
À tarefa anterior, seguiu-se “A maratona” (Figura 3), em que era pedido que os alunos comparassem números em numeral decimal, identificando o maior e o menor (correspondentes à maior e menor distância percorrida pelos atletas) e ordenando os números na reta numérica.

Figura 3 – Parte do enunciado da tarefa "A maratona"

A maratona

Na tabela seguinte apresentam-se as distâncias até agora percorridas por cinco atletas, numa corrida com 42 quilómetros. Observa-a com atenção:

Atleta	Distância até agora percorrida
Pedro	24,05 km
João	24,3 km
Mário	25,5 km
Luís	25,15 km
Manuel	24,7 km



Fonte: Materiais da pesquisa, 2014.

No momento de discussão coletiva, grande parte dos alunos identificou que 25,5 era superior a 25,15 através da reunitização por partição de 5 décimas em 50 centésimas:

> Guilherme: É o Mário [quem vai à frente - 25,5] porque cinco é igual a cinquenta ou metade, que é mais que quinze.

Alguns alunos justificaram a reunitização recorrendo à tarefa inicial das garrafas, onde a garrafa média tinha 0,5 *l* ou 0,50 *l* de capacidade, que era superior à capacidade de 0,25 *l* da garrafa mais pequena. Outros alunos, como Jorge e Luísa recorreram ao modelo da reta numérica graduada em décimas, tal como André, evidente na explicação de Jorge relativamente à comparação entre 24,05 e 24,3:

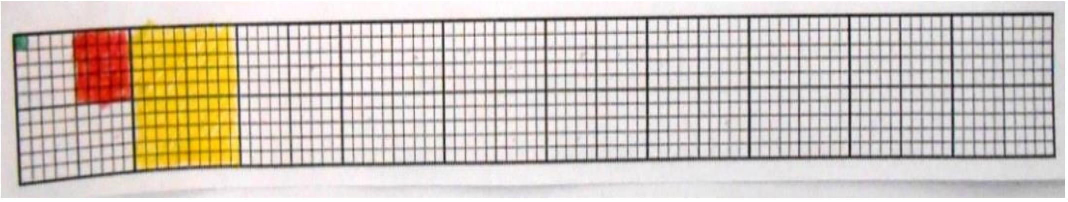
> Jorge: Nós pensámos que o Pedro (24,05) era o último porque (…) se vinte e cinco vírgula quinze, quinze era um tracinho mais meio. E agora como é vinte e quatro vírgula zero cinco não tinha nenhum um a dizer que era um tracinho. E nós pensámos como o cinco é metade de dez, eu considerei dez este tracinho aqui [apontando para o espaço compreendido entre décimas na reta numérica] e então era metade deste tracinho.

O aluno relacionou cada unidade do numeral à sua localização na reta numérica. Ao considerar uma décima como dez, Jorge fez uma reunitização por partição de 1 décima em 10 centésimas. Não o faz por reconhecer que cada décima representa um grupo de dez centésimas, mas antes por estabelecer a relação entre 5 e 10 enquanto números inteiros. Por fim, reunitizou por reagrupamento 5 centésimas como "metade deste tracinho", isto é, metade de 1 décima.

Nesta fase, os alunos começaram a mostrar algum entendimento do sistema de numeração decimal estendido à direita da vírgula. Compreendem que as unidades se vão tornando progressivamente menores à medida que se movem da esquerda para a direita ao longo do numeral, embora não pareça ainda ser evidente que reconheçam que cada unidade é $10\times$ menor que a unidade imediatamente à esquerda.

Após a realização de tarefas com numerais até às milésimas, sentiu-se a necessidade de trabalhar com um modelo que possibilitasse a sua representação e tornasse clara a relação entre unidades decimais. Esta tarefa foi a primeira em que o modelo 10×100 foi explorado. Foi pedido que os alunos representassem numa barra uma décima a amarelo, uma centésima a vermelho e uma milésima a verde. Foram vários os alunos que identificaram cada parte pedida, incorretamente, como Mafalda representou (Figura 4).

Figura 4 – Registo de Mafalda na tarefa "Números em barrinhas"



Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

O facto de a barra apresentar quadrados de dimensão maior (as décimas) e dimensão menor (as milésimas), pode ter induzido os alunos a considerar que uma centésima iria corresponder a um quadrado de dimensão média, sem atender à relação de 10× maior ou menor entre as unidades, tal como Frederico verbalizou:

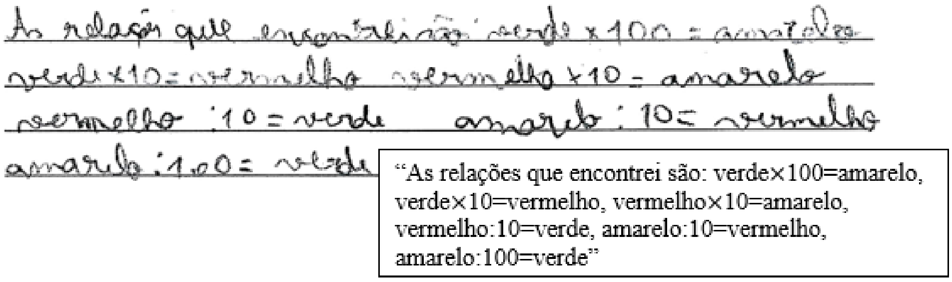
> Frederico: Eu acho, já que isto está dividido em quatro partes iguais, o quadrado inteiro, eu achei que uma milésima já era um bocadinho e uma centésima já achava que era aquilo…
> I: Porque era um bocadinho maior…
> Frederico: Porque é um bocadinho maior.

No entanto, quando foi pedido a Frederico que centrasse a atenção na relação entre as diferentes unidades, o aluno alterou a sua resposta:

> I: A centésima é um bocadinho maior que a milésima. Mas quantas vezes é maior?
>
> Frederico (de imediato): Dez!

Rapidamente, o aluno reunitiza por partição a centésima em dez milésimas, corrigindo a sua representação da centésima. Apesar das características desta representação ter induzido esta identificação de cada uma das partes, o facto de se encontrarem visíveis a unidade, décima, centésima e milésima num mesmo modelo, promoveu a reunitização de cada uma das partes identificadas. Tal foi evidente quando foi pedido aos alunos que identificassem relações possíveis entre cada uma das partes pintadas. Tal como outros colegas, Artur realizou reunitizações por partição e por agrupamento (Figura 5).

Figura 5 – Registo de Artur na tarefa "Números em barrinhas"



Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

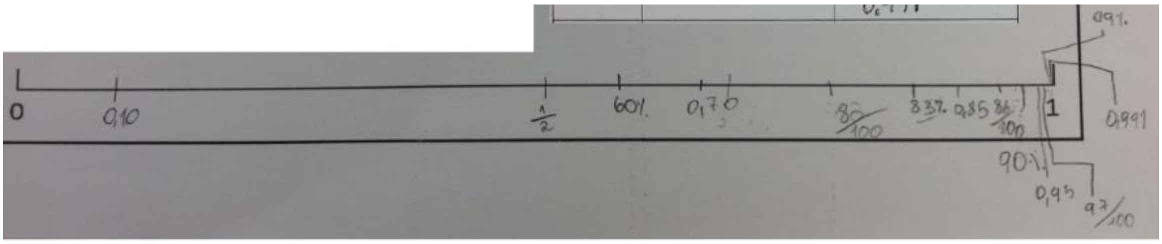
Foi nesta tarefa que, pela primeira vez, foram explicitadas pelos alunos este tipo de relações entre unidade, décima, centésima e milésima, emergindo assim a relação entre unidades enquanto 10× maiores ou 10× menores, noção fundamental na estrutura decimal.

Movendo-se entre representações

Uma das últimas tarefas da intervenção, realizada no 4.º ano, implicava a transformação de números racionais em numeral decimal, fração e percentagem, associada ao modelo da reta numérica. Era pedido que os alunos posicionassem números na reta numérica, variando a sua representação simbólica, e com a condição de colocarem um número entre o último dito pelo par e 1. Foi dado tempo para realizarem o máximo de jogadas possíveis.

Na Figura 6 apresentamos o registo realizado por Jorge, com o par Afonso.

Figura 6 – Registo das jogadas realizadas pelo par Jorge e Afonso na tarefa "Será que a reta 'aguenta' tantos números?!"



Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Jorge e Afonso, à semelhança de vários colegas, fizeram uso da estrutura decimal para apoiar as transformações entre representações de número racional. Inicialmente, reconheceram a centésima como unidade facilitadora da transformação entre numeral decimal, fração e percentagem, evidente, por exemplo, na sequência de números selecionados a partir de 60%: 0,70; 80/100; 83%; 0,85; 86/100…

No momento de discussão coletiva foi discutida a possibilidade de identificar um número situado entre o último número 0,991, selecionado por Jorge e Afonso, e 1:

Jorge: Nós não temos a certeza, mas achamos que sim. Nós estávamos já no zero vírgula nove nove um e depois calhou-nos fração e já não conseguimos mais… Agora acho que estou a ver que há uma fração. Ah, sim, há!

> I: Qual?
> Jorge: Novecentos e noventa e um sobre mil.
> I: Mas isso é isto [0,991]
> Jorge: Sim. Ah! Então é… Novecentos e noventa e dois sobre mil.

Foi na partilha ao grupo que Jorge identificou que poderia registar $\frac{992}{1000}$. Contudo, Rute reagiu de imediato referindo "Mas em percentagem já não havia [um número maior que o anterior]". Foi então pedido o contributo dos colegas e Tomás sugeriu:

> Tomás: Eu acho que isso pode ser noventa e nove por cento vírgula três.
> Vários alunos: Ah! (surpresos)

A representação em numeral decimal foi mobilizada por Tomás para representar o número em percentagem. Os colegas reagiram à representação 99,3% com surpresa, precisamente pelo uso de um numeral decimal enquanto componente numérica da representação em percentagem uma vez que, até ao momento, esta surgiu sempre associada a números inteiros, contudo, aceitaram de imediato esta representação. Tomás acrescentou ainda que 99,9% tinha sido o último número que havia conseguido marcar na reta.

De novo, foi pedido que os colegas indicassem um número que pudesse ser localizado entre 99,9% e 1:

> Jorge: Acho que pode ser este: zero vírgula nove nove nove um.
> Guilherme: Existem formas infinitas.
> Catarina: Como é que nós fazíamos a seguir a esse número (0,9991), em fração?
> I: Não é a seguir. [Há] um possível [número] maior?
> Rute: Nove mil novecentos e noventa e nove sobre dez mil. Podemos escrever infinito[6] em baixo! (referindo-se ao denominador, gesticulando o símbolo do infinito no ar).

A milésima pareceu ter sido considerada por grande parte dos alunos como a menor unidade de divisão possível. Por este motivo, não foi imediata a identificação de um número maior que 99,9%. Com o número sugerido por Jorge, 0,9991, surgiu também a possibilidade de considerar a unidade dividida em partes progressivamente menores, mantendo a relação de cada uma ser 10 vezes menor do que a anterior. O entendimento de progressivas divisões da unidade levou os alunos a considerar infinitas possibilidades, o que é um forte contributo para a construção da propriedade densidade do conjunto dos números racionais.

[6] O símbolo de infinito (∞) era conhecido por alguns alunos por curiosidade.

A última tarefa em análise foi resolvida na entrevista realizada no final da intervenção e envolvia a ordenação dos números $\frac{1}{4}$; 0,025; 0,205; 20% e 0,002. Focamos como Rute organizou os números por ordem decrescente, da seguinte forma: $\frac{1}{4}$ > 20% > 0,205 > 0,025 > 0,002. A investigadora pediu-lhe que explicasse como tinha organizado os números:

> Rute: Um quarto vale vinte e cinco, por exemplo. Vinte por cento... Hum... É vinte por cento, é um quinto. Zero vírgula duzentos e cinco é como se fosse também um quinto só que com mais cinco milésimas. E este [0,025] também seria um quarto de... Um quarto de uma décima? E este [0,002] seria... Um quinto de uma centésima (encolhe os ombros e sorri).

Rute revelou grande destreza em transformar as representações, movimentando-se entre percentagem, fração e numeral decimal conforme lhe pareceu mais eficiente. Após explicitar como comparou os números, apercebeu-se da troca entre as etiquetas relativas a 20% e 0,205 e apresentou a ordenação correta.

A aluna transformou $\frac{1}{4}$ como "vinte e cinco", que parece estar associado a uma representação em percentagem dado que a seguir refere "Vinte por cento… Hum… É vinte por cento", como se estivesse a usar a percentagem como representação comum. Relacionou 0,205 com 20%, referindo "é como se fosse também um quinto", parecendo reconhecer 20% (ou 0,20) em 0,205 que reunitiza por reagrupamento como $\frac{1}{5}+0,005$.

Rute reunitizou 0,025 e 0,002 usando o tipo de estratégia por reagrupamento através de relações multiplicativas. Reunitizou 0,025 como $\frac{1}{4}$ de uma décima e 0,002 como $\frac{1}{5}$ de 0,01, conceptualizando unidades progressivamente menores para pensar sobre os números como partes também progressivamente menores dessas unidades.

Discussão

Na primeira secção dos resultados, *Atribuindo significado ao numeral decimal*, e tal como seria expectável, mostrou-se que os alunos começaram por interpretar numerais decimais como se de números inteiros se tratassem (e.g., DURKIN; RITTLE-JONHSON, 2015). Contudo, destacamos o modo como a percentagem foi particularmente facilitadora da interpretação de numeral decimal numa fase em que esta representação era ainda pouco familiar aos alunos. O recurso à percentagem permitiu reunitizar a unidade de referência como 100%, o que levou ao estabelecimento de relações entre 0,50 e 0,25, interpretados como 50% e 25%. A componente numérica da representação em percentagem, na qual foram usados números inteiros, parece ter facilitado estas relações. Estes resultados realçam como o uso da percentagem pode ser importante na aprendizagem inicial de número racional, possibilitando transformações entre representações, tal como destacam Moss e Case (1999) no seu estudo.

Na secção *Estendendo a estrutura decimal*, foram apresentadas evidências do reconhecimento do prolongamento da estrutura decimal à direita da vírgula. Os alunos foram revelando progressiva facilidade na identificação de que no numeral, da esquerda para a direita, as unidades se iam tornando progressivamente menores. A reunitização por partição das unidades por 10 (BATURO, 2000), da esquerda para a direita no numeral, emergiu depois com o recurso a representações icónicas como a reta numérica ou a barra 10×100. Foi desta compreensão das relações entre as unidades que pareceu ter surgido o reconhecimento da noção de valor de posição prolongado às unidades situadas à direita da vírgula.

Na última secção, *Movendo-se entre representações*, os resultados destacam como o numeral decimal pode constituir-se como ponte entre representações (BROCARDO, 2010). A partição da unidade em cem partes iguais, representada em numeral decimal até à unidade das centésimas, facilitou a transformação em frações com denominador 100 e percentagem. A compreensão da estrutura decimal revelada pelos alunos permitiu ainda a dedução de que novas partições da unidade das milésimas poderiam ser realizadas, implicando a sua divisão em partes 10× menores. Esta noção é essencial para a compreensão da propriedade densidade que, por ser característica do conjunto dos números racionais, representa um avanço significativo no desenvolvimento da compreensão de número (SIEGLER et al., 2011).

Para além de potenciar uma ponte entre diferentes representações, a compreensão da estrutura subjacente ao numeral decimal possibilitou também a realização de reunitizações por reagrupamento bastante complexas que implicaram ainda relações entre diferentes representações (evidentes no último episódio analisado). Estes resultados enfatizam que, tal como Lachance e Confrey (2002) referem, a compreensão de número racional em numeral decimal envolve necessariamente o estabelecimento de conexões entre esta representação, fração e percentagem.

Entre os diferentes tipos de reunitização realizados pelos alunos, as reunitizações por agrupamento tiveram menor expressão que por partição ou reagrupamento. Estes dois tipos de reunitização podem ter sido considerados mais eficientes para pensar nos numerais uma vez que podem ser suportados por relações estabelecidas com números inteiros. Por exemplo, pensar 25,15 e 25,5 como 25 unidades e 15 centésimas e 25 unidades e 50 centésimas, respetivamente, parece facilitar a comparação entre os números, sendo comparados os números 15 e 50 que se reconhecem associados a unidades menores que 1 (as centésimas). Desta forma, e tal como Moss e Case (1999) referem, a mobilização de conhecimento associado a números inteiros pode contribuir para a construção da compreensão de número racional.

Conclusão

Neste artigo procurámos analisar como alunos do 1.º ciclo do ensino básico compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações. Os resultados deste estudo mostram que a compreensão da estrutura decimal é bastante complexa e não é imediatamente evidente para os alunos.

As representações icónicas foram um importante suporte de processos de reunitização que tornaram explícita a relação entre unidades do numeral, promovendo o reconhecimento do prolongamento da estrutura decimal aos números racionais. O uso de representrações simbólicas, em particular a percentagem, fortemente associadas às garrafas de água, foi fundamental. Numa etapa inicial, as representações simbólicas foram usadas de modo a atribuir significado à representação em numeral decimal ainda pouco familiar para os alunos e, numa etapa posterior, foi a estrutura subjacente ao numeral decimal que apoiou o uso flexível de diferentes representações. O numeral decimal não só foi o elo de ligação entre representações como a estrutura que lhe é inerente se revelou uma lente poderosa para compreender número racional. O facto de se constituírem unidades de base 10, progressivamente maiores ou menores, permitiu transformar o número da forma considerada mais eficiente, podendo ser representado não só em numeral decimal, como em percentagem ou fração, ou até combinando diferentes representações simbólicas.

Assim, um trabalho em torno de numeral decimal implica, primeiro e necessariamente, uma atenção particular à estrutura decimal, envolvendo processos de reunitização progressivamente mais complexos, fundamentais na conceptualização da unidade. Implica ainda uma constante relação com outras representações promovendo não só uma progressiva significação de numeral decimal, como também uma compreensão global de número racional.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/108341/2015).

Referências

BATURO, A. R. Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J., Bana & A., Chapman (Eds.), **Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle, WA: MERGA, 2000, p. 95-103.

BATURO, A., R. Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M., J., Hoines & A., B., Fuglestad (Eds.), **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Bergen University College: PME, 2004, v. 2, p. 95-102.

BATURO, A., R.; COOPER, T., J. Year 6 students' idiosyncratic notions of unitising, reunitising, and regrouping decimal number places. In T., Nakahara, K., Masataka (Eds.), **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Japan: PME, 2000, v. 2, p. 57-64.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R Rational number, ratio and proportion. (1992). In GROUWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing, 1992. p. 296-333.

BROCARDO, J. Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. **Educação e Matemática**, Lisboa: APM, n. 109, p. 15-23, set. out. 2010.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Ed. Routledge, 2016, p. 481-503.

DURKIN, K.; RITTLE-JOHNSON, B. Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. **Learning and Instruction**, United Kingdom, v. 37, p. 21-29, set. 2015.

HIEBERT, J. Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G., Leinhardt, R., Putnam & R., A., Hattrup (Eds.), **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching**, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1992, p. 283-322.

LACHANCE, A.; CONFREY, J. Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. **Journal of Mathematical Behavior**, United Kingdom, v. 20, n. 4, p. 503-526. 2002.

LAMON, S., J. The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 27, n. 2, p. 170-193, mar. 1996.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa: APM, v. 14, n. 1, p. 89-107, 2005.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of rational numbers: A new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar. 1999.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Lisboa: APM, 2007.

PONTE, J., P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa: APM, v. 25, n. 2, p. 77-98, dez. 2012.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

POST, T.; CRAMER, K.; BEHR, M.; LESH, R.; HAREL, G. Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), **Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts**, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates, 1993, p. 327-362.

RESNICK, L., B.; NESHER, P; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMANSON, S.; PELED, I. Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 20, n. 1, p. 8-27, jan. 1989.

SIEGLER, R. S., THOMPSON, C. A., & SCHEINER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, USA, v. 62, n. 4, p. 273-296, jun. 2011.

STEINLE, V.; STACEY, K. The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. **Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** Brisbane: MERGA, 1998. p. 548-555.

STREEFLAND, L. **Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TRIPATHI, P., N. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, United States, v. 13, n. 8, p. 438-445, abr. 2008.

VAMVAKOUSSI, X.; VAN DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **Journal of Mathematical Behavior**, United Kingdom, v. 31, n. 3, p. 344-355, set. 2012.

Submetido em maio de 2018
Aprovado em setembro de 2018