
Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior¹

Lilian Nasser

Projeto Fundação - IM/UFRJ
lnasser.mat@gmail.com

Geneci Alves de Sousa

SENAI-CETIQT, SEEDUCRJ, SME-RJ, Projeto Fundação - IM/UFRJ
prof.geneci@yahoo.com.br

Marcelo André A. Torraca

SEEDUCRJ, UVA, Projeto Fundação - IM/UFRJ
torraca@gmail.com

Resumo:

O objetivo deste estudo¹ é investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior, e empreender ações para melhorar o desempenho de alunos de Cálculo I, a partir da análise de soluções apresentadas. As dificuldades são atribuídas, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. A prontidão para a aprendizagem de Cálculo depende de vários conteúdos, como geometria, vetores e funções. Os resultados indicam que as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de alguns tópicos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Cálculo. Transição. Ensino Médio. Ensino Superior.

Performance in calculus: investigating the transition from middle school to higher education

Abstract

The aim of this study is to investigate how the transition from high school to higher education takes place and to undertake actions to improve the performance of Calculus I students, based on the analysis of solutions presented. The difficulties are attributed, in general, to gaps in the learning of Mathematics at Basic School. Learning readiness for Calculus depends on various contents such as geometry, vectors, and functions. The results indicate that the difficulties in the transition to Higher Education, especially in the discipline of Calculus, can be softened by appropriate approaches of some topics at High School.

Keywords: Calculus. Transition. High school. Superior education.

¹ Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Projeto Fundação (IM/UFRJ) e contou com a colaboração dos demais membros do grupo de pesquisa: os professores Bruno do Espírito Santo Batista, Jeanne Barros, José Alexandre Ramos Pereira, Magno Luiz Ferreira, Rafael Felipe Novoa Vaz e os estagiários Alan Junior Severo e Juliana Severino Mendonça.

Introdução

Esta pesquisa foi motivada pela observação das dificuldades apresentadas por alunos calouros na primeira disciplina de Cálculo, causando altos índices de reprovação e de evasão (OLIVEIRA; RAAD, 2012).

Um grupo do projeto de extensão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ), Projeto Fundão², formado por professores de Cálculo e da Educação Básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio), resolveu desenvolver esta pesquisa, com os objetivos de investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior em relação à aplicação de conteúdos básicos para o Cálculo e empreender ações para diminuir tais índices. A meta é a elaboração de material didático para professores que atuam no Ensino Médio, sugerindo abordagens adequadas para alguns conteúdos, tais como funções, vetores e Geometria, de modo a diminuir as dificuldades em Cálculo.

Os estudos relatados a seguir mostram que há uma preocupação nacional e internacional em investigar estratégias de ensino que tornem mais amena a transição para o ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo.

Revisão de literatura

Observa-se que grande parte dos problemas propostos na disciplina de Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de “máximos e mínimos”, de “taxas relacionadas” e de “área entre curvas”. Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura. Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994, p. 241) afirmam que muitos professores não percebem a conexão da geometria do Ensino Médio com a matemática do Curso Superior. Vários conceitos fundamentais de Cálculo são introduzidos por meio de figuras, como os conceitos de integral definida, derivada, área entre curvas, máximos e mínimos, e os problemas de taxas relacionadas. Esses pesquisadores observaram que os alunos resistem ao uso de estratégias geométricas e espaciais, embora seus professores enfatizem o uso de diagramas na resolução de problemas de Cálculo. Essa resistência se deve, provavelmente, à falta de domínio dos conceitos geométricos por parte dos alunos de Cálculo. Esses autores afirmam ainda que

[...] o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada.

² <http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/>

Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é “congelado”. (BALOMENOS et al., 1994, p. 247)

Sarubbi e Soares (2009) investigaram as dificuldades na resolução de problemas de taxas relacionadas, observando que, para a compreensão adequada de alguns conteúdos, é necessário apelar muitas vezes para a álgebra do ensino médio ou a geometria do ensino fundamental. Assim, deficiências trazidas da álgebra, da aritmética, da geometria plana e espacial contribuem para o insucesso também em problemas no ensino superior em disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral (SARUBBI; SOARES, 2009, p.4).

Outra pesquisa, desenvolvida por Irias et al. (2011), analisou as dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral em uma turma de Licenciatura em Matemática. Esses pesquisadores constataram, por meio da análise das avaliações e de entrevistas com os professores, que as dificuldades dos alunos estão em:

- ✓ Funções: na construção de gráficos e na descrição do domínio e da imagem;
- ✓ Manipulação algébrica;
- ✓ Interpretação dos dados.

Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia, e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como o uso dos estilos de aprendizagem dos alunos no desenvolvimento de estratégias de ensino apropriadas, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos. Nessa abordagem, os alunos chegam ao gráfico pretendido por meio de transformações nos gráficos básicos. São mostrados exemplos de gráficos de retas, parábolas e funções envolvendo $|x|$, $\ln x$ e e^x , obtidos por esse processo.

Referencial teórico

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991, p. 133) apontam mudanças quantitativas:

mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado.

Tall (1991, p. 20) também aponta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, ao afirmar que “[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma

transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições.”

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina.

A metodologia de análise de erros foi usada numa investigação sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo, desenvolvida por Cavasotto e Viali (2011, p. 15), concluindo que “[...] o maior obstáculo enfrentado pelos educandos não está nos conteúdos específicos do Cálculo, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica, estudados nos níveis Fundamental e Médio”.

O conceito de função, essencial na aprendizagem de Cálculo, tem sido tema de estudos e pesquisas. De acordo com Caraça (1984, p. 109), o conceito de função está ligado à ideia de correspondência entre dois conjuntos. A função é vista como uma busca da compreensão da ‘Realidade’, com suas características fundamentais: a interdependência e a fluência, isto é, a função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades. Como exemplo, Caraça apresenta a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda livre de um corpo no vácuo (CARAÇA, 1984, p. 126).

Even (1990) também observou dificuldades no domínio de funções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que “há uma imagem única para cada número” (EVEN, 1990, p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos.

Em relação às funções, a diversidade de representações também impede o domínio total do conceito. De acordo com Duval (2003, p. 31),

há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato.

Duval (2003) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. Damm (2002, p. 145) define o tratamento de uma representação como “a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada, é uma transformação interna a um registro”. Por outro lado,

a conversão de uma representação é a transformação desta em uma representação em um outro registro conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático

em questão. A conversão não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece “dentro” do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes. (DAMM, 2002, p. 146)

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2003) pode ser resumida à necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, analítica e gráfica, articulando a transição entre esses registros. Por exemplo, a partir do gráfico de uma função, o aluno deve ser capaz de estabelecer uma expressão analítica para essa função e criar uma situação problema que possa ser representada por ela.

Metodologia

Esta investigação recaiu sobre a análise de soluções apresentadas por alunos calouros de Engenharia numa universidade particular, na disciplina de Cálculo I. As questões analisadas foram extraídas de avaliações regulares que esses alunos realizaram ao longo do período em que estavam matriculados nesta disciplina. Os problemas observados envolvem os conteúdos de taxas relacionadas e de máximos e mínimos. A seguir, são apresentadas algumas questões e soluções extraídas de avaliações formais, que exemplificam as dificuldades e erros mais comuns.

Na questão sobre taxas relacionadas mostrada na figura 1, esperava-se que o aluno pudesse construir um plano cartesiano no qual representasse os veículos e suas respectivas velocidades, considerando os sinais relativos das mesmas, em função do sentido de seus deslocamentos, duas horas após o início da contagem do tempo.

Figura 1 – Questão aplicada numa turma de Cálculo I, do 1º período de Engenharia disciplina de Cálculo I

2) "Bertha Benz e a primeira viagem de automóvel"
Leia mais sobre esse assunto em <http://oglobo.globo.com/economia/bertha-benz-a-primeira-viagem-de-automovel-2871698#ixzz1efjc8fLj>



(...) Entusiasta das bicicletas e dos motores, Benz acabou inventando o automóvel... Sua mente genial bolou um chassi tubular, um sistema de tração e pronto - nasceu o Patent-Motorwagen. O curioso é que, a menos de 100km de distância e sem o conhecimento de Benz, outro alemão também avançava na criação do automóvel. Era Gottlieb Daimler. Só em 1926 é que as empresas se uniram, formando a Daimler-Benz.

O primeiro exemplar do Benz Patent-Motorwagen, de 1886, hoje está no Deutsches Museum, em Munique. Depois, vieram aperfeiçoamentos, até que as vendas ao público enfim começassem, em 1888.

Na primeira viagem de automóvel, iniciada em 5 de agosto de 1888, era Bertha Benz quem estava ao volante em um veículo que viaja para o Sul a 60 Km/h, e em um outro veículo estava seu compatriota Gottlieb, que se descolava rumo ao oeste a uma velocidade de 25 km/h. Suponhamos que as velocidades se mantiveram constantes e que tenham partido do mesmo local (origem), a que taxa estaria aumentando a distância entre os veículos duas horas após a partida?

Fonte: imagem: https://www.google.com.br/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiX44rq4czTAhXCx5AKHWSgAdoQjRwIBw&url=http%3A%2F%2Fjornaldocarro.estadao.com.br%2Ffanaticos%2Fdia-da-mulher-conheca-a-mae-do-utomovel%2F&psig=AFQjCNHsS_76mD_KD4UhRz5XdtkpFeA9hQ&ust=1493661763450716 Texto adaptado: <http://oglobo.globo.com/economia/bertha-benz-a-primeira-viagem-de-automovel-2871698#ixzz1efjc8fLj>

Para a resolução, o estudante deveria compreender que a velocidade pode ser considerada como a taxa de variação do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo. Sendo assim, a distância entre os veículos, representada por um segmento de reta que os une, juntamente com as representações das duas trajetórias, descrevem um triângulo retângulo, o qual deveria ser utilizado para relacionar as grandezas envolvidas. Aplicando os conceitos da Geometria (Teorema de Pitágoras) e do Cálculo (derivada de uma função) obteriam a taxa de variação da distância entre os veículos duas horas após a partida de ambos.

As soluções dos 15 alunos que resolveram esta questão foram assim divididas: três alunos deixaram a questão em branco; quatro apresentaram uma solução parcialmente correta; sete alunos erraram a questão; e somente um aluno acertou completamente. Os quatro alunos que resolveram parcialmente a questão representaram corretamente o problema através de um desenho, identificaram as variáveis, correlacionaram-nas, derivaram e “resolveram” o problema. Entretanto, apresentaram pequenos erros ao longo de seu desenvolvimento, como exemplificado na figura 2.

Figura 2 – Erro na representação do plano cartesiano

estaria aumentando a distância entre os veículos duas horas após a partida?

$l^2 = x^2 + y^2$
 $2l \frac{dl}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$
 $l \frac{dl}{dt} = (50 \cdot 25) + 120 \cdot 60$
 $\frac{dl}{dt} = \frac{(50 \cdot 25) + (120 \cdot 60)}{130} = \frac{1250 + 7200}{130} = 65 \text{ km/h}$

R: A distância estaria aumentando numa taxa de 65 km/h.

Fonte: Fonte própria.

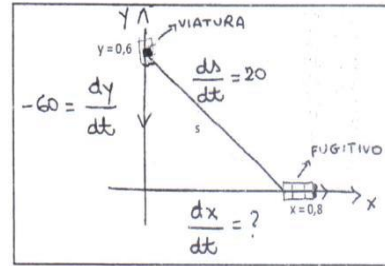
Dentre as 7 respostas erradas, podemos destacar os seguintes erros: não conseguir representar, no plano cartesiano, a situação problema; representar o triângulo, mas, não identificar as variáveis; representar o triângulo e as variáveis, mas, por não identificar que se tratava de um triângulo retângulo, não souberam como relacioná-las por meio do Teorema de Pitágoras.

A segunda questão apresentada aos alunos e analisada também foi de taxas relacionadas. O problema a seguir foi objeto de um artigo de pesquisa com alunos de Cálculo, levantando algumas hipóteses a respeito das causas das dificuldades (SARUBBI; SOARES, 2009). Esse mesmo problema foi aplicado em nossa pesquisa, como uma questão do exame final, realizado por 23 alunos.

O diferencial dessa questão, em relação à primeira, é que foi apresentado um diagrama de resolução inicial, onde o plano cartesiano, a posição relativa de cada veículo e suas respectivas trajetórias e velocidades já estavam representados.

Figura 3 – Questão aplicada no Exame Final de Cálculo I

- 4) Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que no cruzamento toma a direção leste. Quando a viatura está a 0,6 km ao norte do cruzamento e o carro fugitivo a 0,8 km a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 km/h. se a viatura está se deslocando a 60 km/h no instante dessa medida, qual é a velocidade do fugitivo?



Fonte: Adaptada de Weir, Hass e Giordano (2009, p. 234).

Analisando as respostas fornecidas pelos alunos, obtivemos sete respostas erradas, duas parcialmente corretas e quatorze respostas corretas. Dentre as sete respostas incorretas destacamos erros na aplicação do Teorema de Pitágoras e erros nas operações com números decimais, mostrados nas figuras 4 e 5.

Figura 4 – Erro na aplicação do Teorema de Pitágoras

Soma de vetores

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

$$-60 + \frac{dx}{dt} = 20$$

$$\frac{dx}{dt} = 80 \text{ km/h}$$

Fonte: Fonte própria.

Figura 5 – Erro nas operações com números decimais

$S^2 = x^2 + y^2$

Derivando $2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$

$$2 \cdot 0,41 \cdot 20 = 2 \cdot 0,8 \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 0,6 \cdot (-60)$$

$$19,2 = 1,6 \cdot \frac{dx}{dt} + (-72)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{91,2}{1,6}$$

$$\frac{dx}{dt} = 57 \text{ km/h}$$

$S^2 = x^2 + y^2$
 $S^2 = 0,8^2 + 0,6^2$
 $S = 1,0$
 $2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$
 $2 \cdot 1,0 \cdot 20 = 2 \cdot 0,8 \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 0,6 \cdot (-60)$
 $40 = 1,6 \cdot \frac{dx}{dt} - 72$
 $112 = 1,6 \cdot \frac{dx}{dt}$
 $\frac{dx}{dt} = \frac{112}{1,6} = 70$

Fonte: Fonte própria.

Apesar dos erros básicos cometidos, podemos considerar que o resultado foi satisfatório, já que o índice de acertos da questão 4 do Exame Final foi bem maior que o da questão 2 da P2 (figura 2). Enquanto apenas um dos 15 alunos que fizeram a prova bimestral (6,7%) acertou essa questão, 14 alunos acertaram a questão do Exame Final, o que corresponde a 60,9% dos 23 alunos que o

realizaram. Essa melhoria no índice de acertos pode ser justificada pela discussão com a turma sobre os erros cometidos na P2.

A partir das respostas obtidas nas duas questões anteriores, pode-se observar que, em questões típicas de taxas relacionadas, os erros causados por dificuldades específicas da disciplina de Cálculo, em geral ocorrem no cálculo das derivadas ou pela substituição de valores na expressão antes de derivar. Já o estabelecimento de uma equação relacionando as variáveis do problema depende de conhecimentos anteriores, como a semelhança de triângulos ou a aplicação de fórmulas ou de teoremas, como nos problemas analisados. Esta etapa pode ser trabalhada no Ensino Médio, preparando os alunos para o estudo de Cálculo.

O conceito de máximo e mínimo de uma função foi o conteúdo escolhido para a quarta questão, também analisada neste trabalho. O problema trata de uma caixa (sem tampa) formada a partir de um pedaço de papelão retangular. O aluno deveria obter a medida do pedaço de papel quadrado a ser retirado de cada canto, para a dobradura da caixa, de modo a obter o maior volume possível. Não era necessária a construção de nenhum diagrama tendo em vista que as figuras foram fornecidas.

O aluno deveria construir uma expressão algébrica que representasse a medida do comprimento de cada aresta da caixa, em função do lado do quadradinho a ser retirado dos cantos. A partir dessas expressões, era preciso obter uma função que permitisse calcular o volume da caixa e, então, aplicar os conceitos do cálculo para obtenção do valor que determina o máximo da função.

Na resolução de problemas de máximos e mínimos observamos grande número de erros no estabelecimento da sentença matemática que equaciona o problema, no trato algébrico e no cálculo de derivadas. A Figura 6 mostra a solução de um aluno que cometeu erro ao equacionar o problema.

Figura 6 – Erro ao equacionar um problema de máximos e mínimos.

Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 8 dm por 5 dm. Para isso, deve se retirar quadrados de lado x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. **Expresse o volume V da caixa como uma função de x .**

Handwritten student work:

$1 \times 4 \times 7 = 28 \text{ dm}^3$
 $(V) \quad 8 \text{ dm}$
 $2 \times 3 \times 6 = 36 \text{ dm}^3$
 $40x - 13x^2 + x^3 =$
 $V_{\text{volume}} = x^3 - 13x^2 + 40x$

$V_{\text{volume}} = x \cdot (8-x) \cdot (5-x)$
 $V = x(40 - 8x - 5x + x^2)$

$1 - 13 + 40 = 28 \text{ dm}^3$
 $8 - 52 + 40 = 36 \text{ dm}^3$

Fonte: Fonte própria.

Por sua vez, o aluno que apresentou para o mesmo problema a solução da figura 7 escreveu a sentença correta, mas errou na multiplicação para obter a expressão da função. Esse tipo de erro, na manipulação algébrica, é muito comum, e poderia ser evitado com uma aprendizagem adequada na Educação Básica.

Figura 7 – Erro na multiplicação de expressões algébricas.

$V = a \cdot b \cdot c$
 $V = (8-2x) \cdot (5-2x) \cdot x$
 $V = 12x^2 - 12x + 40$
 $V = 12x^2 - 12x + 40 = 0$
 $3x^2 - 3x + 10 = 0$
 $\boxed{x_1 = -5} \quad \boxed{x_2 = 2}$

$V = (8x-2x^2) \cdot (5x-2x^2)$
 $V = 40x^2 - 16x^3 - 10x^3 + 4x^4$
 $V = 4x^4 - 6x^3 + 40x^2$
 $V = 4x^3 - 6x^2 + 40x$
 $V(0) = 0 \text{ cm}^3$
 $V(-5) =$
 $V(2) = 88 \text{ cm}^3$

Fonte: Fonte própria.

Recomendações para minimizar as dificuldades

Com base nas pesquisas citadas, na experiência e nos trabalhos já desenvolvidos pelo nosso grupo (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012), algumas ações no Ensino Médio podem ser destacadas como favoráveis à superação de obstáculos, à construção do conceito de função e ao domínio do traçado de gráficos, minimizando as dificuldades:

✓ **o incentivo às habilidades com o trato algébrico**, em particular as operações e fatoração de expressões algébricas, e o completamento de quadrados, necessário, por exemplo, no cálculo de limites e na translação de gráficos

✓ **o reconhecimento de padrões em seqüências de figuras, que constitui uma boa prontidão para o conceito de função**, e pode ser explorado desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Cândido (2000) relata uma experiência propondo um caráter dinâmico para o ensino de funções. Inicialmente, a ênfase é na familiarização com a variação de grandezas, observando a dependência entre as variáveis. A seguir, numa segunda etapa, as atividades abordam a análise e comparação de variações, em que as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais. A partir daí, passa-se à familiarização com as ideias que dão suporte ao conceito de função do 1º grau, com suas características algébricas e geométricas.

✓ **a exploração de funções definidas por mais de uma sentença**, que contribui para derrubar a crença de que toda função deve ser representada por uma expressão algébrica. Problemas práticos como o custo de estacionamentos, dependendo do tempo de permanência, do imposto de renda a ser pago são exemplos representados por funções definidas por várias sentenças. Os alunos têm chegado ao Ensino Superior sem vivenciar esse tipo de gráficos.

✓ **o tratamento das progressões como funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais**. Esta é uma recomendação do PCN/EM (1999, p.225) que é reforçada na segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016), ainda em discussão. Ainda no tópico de funções, é recomendada a ideia de relacionar esse conceito com outros conteúdos da Matemática e de outras Ciências.

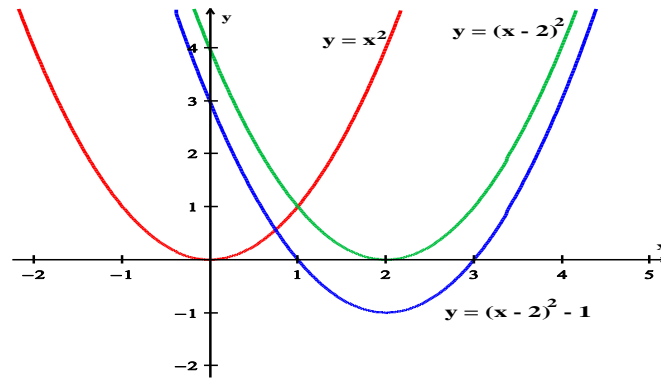
✓ **a exploração de figuras geométricas, tanto bidimensionais como tridimensionais, com a identificação de propriedades entre seus elementos**. As dificuldades aparecem na resolução de problemas de máximos e mínimos quando é preciso representar a situação problema graficamente e estabelecer relações para aplicar a derivada. Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo. Por exemplo, consideremos o problema de Cálculo:

*Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto.
Determine as dimensões do cone de volume mínimo.*

Para resolvê-lo é preciso exprimir o volume do cone como uma função de uma variável para depois aplicar a derivada. Essa etapa do problema pode ser explorada na geometria do Ensino Médio, alterando a demanda para: “*Expressar o volume do cone como função de sua altura h* ”. A representação gráfica desse problema requer a identificação de triângulos semelhantes na seção transversal de uma esfera inscrita num cone (BALOMENOS; FERRINI-MUNDY; DICK, 1994, p. 245).

✓ **o uso de transformações no plano para chegar ao gráfico pretendido por meio de translações e reflexões nos gráficos básicos**. Os alunos devem ser incentivados a traçar gráficos de funções afim e quadráticas usando transformações a partir dos gráficos básicos de $y = x$ e $y = x^2$, respectivamente. A figura 8 mostra as transformações aplicadas à parábola $y = x^2$ para obtenção da parábola $y = x^2 - 4x + 3$. É preciso completar o quadrado e expressar essa função por $y = (x - 2)^2 - 1$.

Figura 8 – 1Gráfico obtido a partir de translações.



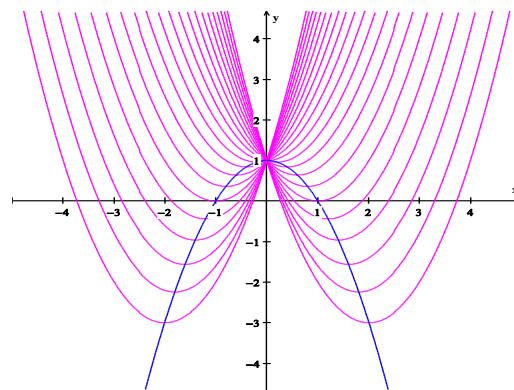
Fonte: Torraca (2005).

Ainda na disciplina de Cálculo I, esse método também pode ser usado para traçar gráficos de funções envolvendo variações das funções $y = \ln x$ e $y = e^x$. Mais adiante, em Cálculo III, o mesmo procedimento pode ser usado com funções de duas variáveis, para facilitar a identificação de paraboloides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (NASSER, 2009, p.52).

✓ **o uso da tecnologia para a observação de modificações no traçado de gráficos.**

Perspectivas de melhoria do ensino–aprendizagem podem ser criadas com o uso de *softwares* para visualizar gráficos de funções (TORRACA, 2005), tais como *Excel*, *Derive*, *Maple* e *Winplot*. Além desses, podem ser usados o Geogebra e o Régua e Compasso, de fácil aplicação. Por exemplo, os alunos podem ser desafiados a investigar o que ocorre com o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando são feitas alterações nos coeficientes a , b e c , separadamente. Em particular, utilizando o *Winplot*, é possível traçar uma família de funções da forma $f(x) = x^2 + bx + 1$, quando o coeficiente de b varia no intervalo $-4 \leq b \leq 4$. O lugar geométrico dos vértices dessa função quadrática quando b varia é uma função quadrática da forma $f(x) = -x^2 + 1$, que pode ser observada na figura 9.

Figura 9 – Lugar geométrico dos vértices do gráfico de quando o coeficiente b varia.



Fonte: Torraca (2005).

Considerações finais

As dificuldades na aprendizagem de Cálculo e em particular na aquisição do conceito de funções têm preocupado os professores, gerando várias linhas de pesquisa.

As respostas de alunos às questões de Taxas Relacionadas e de Máximos e Mínimos analisadas neste trabalho indicam que é considerável o número de erros devidos a conteúdos referentes à Escola Básica. Como vimos, isso tem sido motivo de estudos e pesquisas nacionais e internacionais. As conclusões apontam soluções a curto prazo, no sentido de preencher as lacunas na aprendizagem de Matemática básica por meio de disciplinas que antecedem ou são concomitantes com a introdução ao estudo de Cálculo. No nosso ponto de vista, isso não basta. É preciso desenvolver ações que gerem a prontidão para o estudo de Cálculo ao longo do Ensino Médio. Os alunos devem explorar exercícios envolvendo a modelagem de problemas, com a análise das variáveis envolvidas e sua relação. Outro aspecto importante é a visualização de sólidos geométricos, com análise dos elementos que aparecem em suas seções transversais e interseções, que podem facilitar a resolução de problemas de máximos e mínimos. A Geometria Analítica também pode preparar para a representação e visualização das situações, como no caso dos problemas analisados neste trabalho. A falta de interpretação correta das informações fornecidas pelos enunciados dos problemas apresentados é outro fator que pode ser minimizado por um trabalho adequado ao longo da Educação Básica. Como desdobramento desta pesquisa, pretendemos desenvolver um material de apoio para professores de Matemática do Ensino Médio, com o enfoque dos livros de Cálculo I.

Referências

BALOMENOS, R., FERRINI-MUNDY, J. e DICK, T. **Geometria: prontidão para o Cálculo**. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo, Atual Editora, p. 241;247, 1994.

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura. BNCC**, 2ª versão, Brasília, DF, 2016.

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, Brasília, DF, P.225, 1999.

CANDIDO, S. L. **Uma experiência sobre o ensino e aprendizagem de funções**. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 7, nº 8, p. 46-56, 2000.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal, 1984.

CAVASOTTO, M e VIALI, L. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros podem informar**. In: *Boletim do GPEM*, Rio de Janeiro, nº 59, p. 15-33, 2011.

- DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.
- EVEN, R. **Subject matter knowledge for teaching and the case of functions**. *Educational Studies in Mathematics*, 21, p. 521-544, 1990.
- IRIAS, D. F. *et al.* **Cálculo Diferencial e Integral: analisando as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática**. *Revista de Educação Matemática da UFOP*, Vol I. (2011). Disponível em:
<<http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/343>>. Acesso em: 10 de março de 2013.
- NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos**. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L. (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58. 2009.
- NASSER, L., SOUSA, G.. & TORRACA, M. **Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo?** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Petrópolis, *Atas*. Rio de Janeiro, SBEMRJ, 2012, disponível em CD.
- NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. **Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação**. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutierrez. *Atas do XIVCIAEM*, Tuxtla Gutierrez, México, 2015.
- OLIVEIRA, M. C. A. e RAAD, M. R. **A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo**. In: *Boletim do GEPEM*, N° 61, p. 125-137. Rio de Janeiro, 2012.
- REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468f. São Paulo. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, SP, 2003.
- ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R. **Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level**. In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991.
- SOARES, F.; SARUBBI, P.A. **Investigando Dificuldades de Alunos de Cálculo em Problemas de Taxas Relacionadas**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XXXVII, 2009, Recife, *Anais...*, Pernambuco, ABENGE, 2009, disponível em:
http://www.abenge.org.br/cobenges-antiores/2009/artigos-2009/artigos-publicados_11. Acesso em: 10 de março de 2013.
- TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- TORRACA, M. **Um estudo sobre álgebra em sistemas computacionais formativos**, 2003, 250 f. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado em Informática), Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, RJ, 2005.
- WEIR, M.; HASS, J.; GIORDANO, F. **Cálculo**, v.1. São Paulo, Ed. Pearson, 2009.

Submetido em janeiro de 2017
Aprovado em março de 2017