Conhecimento matemático para o ensino das frações: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais

Angélica da Fontoura Garcia Silva
UNIAN/SP
angelicafontoura@gmail.com

Ruy Cesar Pietropaolo
UNIAN/SP
rpietropaolo@gmail.com

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro
UNIAN/SP
gracilenepinheiro@gmail.com

Resumo
Neste artigo busca-se identificar conhecimentos profissionais de professores que lecionam matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental a respeito das frações e seu ensino a partir da análise das respostas dadas a um questionário. Com o apoio dos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), que discutem a base de conhecimentos de professores para o ensino de Matemática, foi possível identificar que, de maneira geral, ao resolverem as questões as professoras utilizaram o esquema de partição e pareciam não reconhecer o significado da fração como divisão. As respostas das docentes também demonstraram o não domínio de outras noções importantes para o ensino de frações como a relação de ordem e a de equivalência. Além disso, não reconheceram a necessidade da conservação da unidade de referência para resolver as situações propostas. Mediante esses resultados, sugere-se um processo formativo que se inicie pela análise de situações que envolvem a relação parte-todo para, depois, articular os diferentes significados por meio de vivências de metodologias diversificadas e reflexões compartilhadas sobre as próprias práticas e sobre os processos de ensino e aprendizagem dessa temática.

Palavras-chave: Formação de professores. Conhecimento matemático para o ensino. Números racionais na representação fracionária.

Mathematical knowledge to teach fractions: a study developed with early elementary school teachers

Abstract
This article aims to identify the professional knowledge of mathematics teachers in the early years of elementary school regarding the teaching of fractions, by analyzing the answers provided in a questionnaire. Based on studies developed by Ball, Thames & Phelps (2008), which discuss teacher's knowledge for the teaching of mathematics, we identified that, generally, the teachers used the partition scheme for problem solving, and did not seem to recognize the meaning of

fraction as a division. The answers provided by the teachers also showed they do not master other important notions for the teaching of fractions such as order and equivalence relations. Besides that, they did not recognize the need of conservation of the unit of reference to solve the proposed situations. In light of these results, we suggest a development process that begins by the analysis of situations that involve the parts-and-whole relation followed by the articulation of different meanings through the experience of diversified methodologies and shared reflections about the teachers' practice and about the teaching-learning processes of this subject.

Keywords: Teacher development. Mathematics knowledge for teaching. Rational numbers on fraction representation

Introdução

Neste artigo, apresentamos resultados parciais de um estudo que buscou investigar os conhecimentos de professores que ensinam aos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental noções relativas ao conceito de número racional na representação fracionária. Esta pesquisa foi realizada no âmbito do Observatório da Educação – projeto financiado pela Capes –, por meio de um grupo colaborativo de formação e pesquisa, visando contribuir para o desenvolvimento profissional desses docentes (PINHEIRO, 2014).

Consideramos que esta pesquisa seja relevante, posto que a compreensão do conceito de frações constitui etapa necessária para a ampliação da ideia de número. As Orientações Curriculares de São Paulo (2014), por exemplo, ressaltam que um dos objetivos de ensino de frações é levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas, exigindo assim outros tipos de número como resposta.

Por outro lado, as noções relativas aos números racionais em sua representação fracionária são consideradas nesses documentos "bastante complexas e fontes de dificuldades de compreensão pelas crianças. Nesse sentido, é preciso ter um cuidado especial ao escolher as formas de abordagem junto às crianças e aprender com algumas lições vindas de pesquisas e de práticas" (SÃO PAULO, 2014, p. 29).

Sua relevância também é reconhecida por pesquisadores. Behr, Lesh, Post e Silver (1983), Kieren (1988), Mack (1990), Ponte (2005), Charalambous e Pitta-Pantazi (2005), Mamede (2007) e Lamon (2005) afirmam que essa temática é considerada uma das mais complexas e importantes a serem ensinadas no Ensino Fundamental e que, do ponto de vista cognitivo, sua aprendizagem é um grande desafio.

No contexto brasileiro concordamos com Campos (2013), quando afirma que "o ensino e aprendizagem de frações constituem um obstáculo considerável para professores e alunos, desde o

4º ano do ensino fundamental no Brasil, quando esse tema é abordado” (CAMPOS, 2013, p. 239). No tocante às dificuldades encontradas pelos nossos alunos, investigações recentes, como as de Rodrigues (2005), Canova (2013) e Santos (2016), observaram lacunas no conhecimento de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental (crianças com 9 e 10 anos), 9º ano do Ensino Fundamental (com idade entre 13 e 14 anos) e de jovens (com idade entre 15 e 18 anos) que estudavam no final da Escola Básica a respeito do conceito de fração.

Quanto ao ensino, notamos que, em consonância com resultados de pesquisa, documentos curriculares oficiais propõem que o trabalho com frações se dê por meio da discussão dos seus diferentes significados. Todavia, estudos como os de Garcia Silva (2007), Monteiro Cervantes (2010) e Costa (2011) chamam a atenção sobre a forte tendência de professores brasileiros de trabalhar esse conceito utilizando, quase que exclusivamente, a relação parte-todo. Nesse cenário, propusemos um curso de formação continuada no qual buscamos discutir os diferentes significados a partir das reflexões sobre a prática docente, analisando dificuldades da aprendizagem desse tema. Entretanto, cabe salientar que para este artigo, em virtude da delimitação de espaço, nosso foco não será o processo formativo, mas sim os conhecimentos dos professores sobre o ensino de frações evidenciados no início do referido processo. Assim, os dados aqui discutidos foram os coletados por meio de um questionário inicial cujos resultados serviram de base para o planejamento e a realização da formação.

Para mostrar os resultados encontrados neste estudo iniciamos por expor a fundamentação, descrevemos os procedimentos metodológicos, apresentamos e discutimos as informações coletadas para, finalmente, tecermos nossas considerações finais.

Fundamentação teórica

Nas últimas décadas, diversos estudos têm contribuído para a reflexão sobre as questões relativas aos conhecimentos necessários ao professor e acreditamos ser os estudos de Shulman (1986, 1987) um dos mais importantes. Em artigo de 1986, esse pesquisador analisava que, nos Estados Unidos, nos processos de avaliação de professores e nos estudos sobre os conhecimentos necessários à docência, não se discutiam questões que envolviam as explicações do professor sobre o ensino de determinados tópicos e sobre fontes de analogias, metáforas, exemplos e reinterpretações do docente. Esses estudos indicavam, tampouco, que as estratégias pedagógicas podem ser seriamente comprometidas quando o professor não apresenta pleno domínio do assunto que vai ensinar.

A não-ênfase a essas questões revelava certa desconsideração da importância dos conhecimentos sobre o ensino de conteúdos da disciplina. Essa “perda de ênfase” foi nomeada por Shulman como “paradigma perdido” (SHULMAN, 1986, p. 7) e como alternativa para o resgate desse paradigma ele propôs uma base de conhecimentos para o ensino que se construísse, prioritariamente, a partir dos conhecimentos específicos da disciplina. Para tanto, Shulman (1986) considera três categorias de conhecimentos necessários ao docente: *conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento do currículo e conhecimento do conteúdo*.

Recentemente, relatando insatisfação em relação ao pouco avanço teórico sobre a base enunciada por Shulman em 1986 e ampliada em 1987, os pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008) se propuseram a um refinamento dessa teoria, ampliando as categorias no âmbito do ensino da matemática.

Para essa tarefa, Ball, Thames e Phelps (2008) basearam-se em pesquisas sobre a observação da prática do ensino de matemática, procurando, por exemplo, investigar como as ideias de conhecimento pedagógico do conteúdo foram incorporadas na prática. Esses pesquisadores indicam a necessidade de dividir o *conhecimento pedagógico do conteúdo* proposto por Shulman (1986) em dois subdomínios: *conhecimento do conteúdo e ensino*; *conhecimento do conteúdo e estudante*. Ainda nesta categoria, esses pesquisadores incluíram também o que Shulman (1986, 1987) denominou *conhecimento do currículo.*

No tocante ao *conhecimento do conteúdo* proposto por Shulman (1986), os pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008) o subdividem em três categorias: *conhecimento horizontal do conteúdo, conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado*.

Para esses autores o *conhecimento comum do conteúdo* é um conhecimento necessário para os professores, mas não é exclusivo deles. Como exemplo desse conhecimento, que todas as pessoas que concluíram a educação básica deveriam ter, é a compreensão dos diferentes significados da fração e sua utilização para resolver problemas.

O *conhecimento especializado do conteúdo* é um tipo de conhecimento sobre matemática único na tarefa de ensinar, isto é, que não se aplica a qualquer outra atividade cotidiana ou profissional em outra área que não à docência. Envolve uma forma incomum de pensar sobre a matemática, não requerida em outras tarefas além do ensino. Vai além daquele conhecimento comum do conteúdo que se pretende que os alunos assimilem. Envolve, entre outras coisas, a análise de erros e daquilo que – do ponto de vista da matemática – facilita ou dificulta uma tarefa proposta; a explicação de procedimentos e apresentação de justificativas para algoritmos e técnicas que ensina; a formulação de questões que permitam relacionar concepções prévias dos alunos a novos temas a serem abordados. Desse tipo de conhecimento um professor pode lançar mão, por exemplo, quando analisa as respostas dadas por seus alunos a uma determinada situação, como a apresentada no quadro 1.

Quadro 1 – Situação proposta pelo professor

Quatro amigos compraram duas pizzas de mesmo tamanho. Cada pizza veio cortada em 8 pedaços exatamente iguais. Cada uma das pessoas comeu apenas dois pedaços. Qual é a fração que representa o que sobrou?

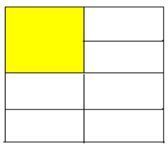
Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor, ao propor esse problema, deve reconhecer que há duas respostas possíveis para ele e que isso deve ser discutido com seus alunos - $\frac{12}{8} e \frac{12}{16}$ -, pois não está explicitado no enunciado qual é o todo, ou seja, não se indica a unidade de referência: uma ou duas pizzas.

A análise desse exemplo nos possibilita considerar que o detalhamento do conhecimento especializado do conteúdo matemático é para a docência uma das principais contribuições de Ball, Thames e Phelps (2008) às ideias de Shulman (1986). Constatamos uma vinculação importante do *conhecimento específico do conteúdo* às situações práticas com as quais o professor se deparará em sala de aula.

O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* se refere a antecipar que tipo de situação motivará e interessará aos seus alunos; antecipar o pensamento dos estudantes e saber o que pode causar dificuldades na apreensão de determinado conteúdo. Nesse sentido, requer do professor familiaridade com a forma de raciocinar dos estudantes quando em contato com determinados conteúdos. Portanto, o professor deve antecipar, por exemplo, um erro comum das crianças quando aprendem fração, ou seja, não consideram necessária a conservação de área quando indicam uma fração como parte de um todo representado em uma figura. Por exemplo, quando o professor solicita que o estudante indique qual a fração que representa a parte pintada da Figura 1:

Figura 1 – Representação figural de situação parte-todo



Fonte: Elaborado pelos autores.

Observemos que um erro comum que poderá ser presenciado pelo professor é perceber que alguns alunos representam $\frac{1}{7}$ *em vez de* $\frac{2}{8}$. Dessa forma, esse profissional precisa ter em mente essa possibilidade, porque a criança pode não considerar a conservação de área. Acreditamos que o fato de o professor ser possuidor desse conhecimento favorecerá sua intervenção. Nesse sentido, reputamos que o *conhecimento do conteúdo e do estudante* está intrinsecamente ligado ao *conhecimento do conteúdo e do ensino*, próxima categoria.

O *conhecimento do conteúdo e do ensino* diz respeito ao repertório do professor utilizado no planejamento do ensino, ou seja, envolve as possíveis escolhas sobre como introduzir uma temática, qual sequência adotar para desenvolver sua compreensão, que abordagens, representações e métodos melhor se adéquam ao ensino de determinada situação, avaliar vantagens e desvantagens de certas abordagens e representações, além de eleger métodos e procedimentos que se adéquam melhor a cada situação. Assim, por exemplo, se considerarmos a dificuldade detectada anteriormente, o professor poderá decidir sobre qual intervenção propor. Além disso, ele também poderá decidir qual significado utilizar para introduzir as frações, como articular os diferentes significados.

Finalmente, o *conhecimento do conteúdo e do currículo*, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), relaciona o conhecimento do conteúdo com a forma como ele é apresentado em orientações curriculares ou materiais instrucionais. Assim, quanto aos números racionais, é importante que o professor conheça as indicações curriculares sobre o ensino das frações ao longo do Ensino Fundamental.

A investigação

O instrumento aqui analisado – questionário preliminar – foi proposto a todo o grupo de professores, mas neste estudo apresentaremos as informações coletadas de três participantes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que nossa escolha ocorreu por serem essas as professoras que representam a maioria das participantes, tanto do ponto de vista de sua formação inicial, do envolvimento em todas as etapas da pesquisa que gerou este estudo, quanto das concepções a respeito do ensino da matemática. Como afirmamos, essa coleta aconteceu no início de um processo formativo e, a partir de seus resultados, procedemos ao planejamento de um curso de formação continuada que se propôs a discutir os processos de ensino e aprendizagem das frações. Tal escolha é justificada apoiada em estudos como os de Chizzotti (2010), os quais consideram que um *caso* a ser estudado deve ser significativo e bem representativo, de modo a ser apto a fundamentar uma generalização, autorizando inferências.

Esse é o perfil das três professoras que participaram desta investigação: Ana, Marcela e Renata [1] têm formação em Pedagogia, duas delas com especialização em Psicopedagogia – *professora Ana* – e Psicomotricidade – *professora Marcela*. A *professora Renata* não possuía, até a data da formação, curso de especialização. Quanto à experiência e atuação profissional, as *professoras Renata e Marcela* contam com uma larga experiência, 15 e 25 anos, respectivamente,

[1] Os nomes aqui apresentados são fictícios. Assim, garantimos o anonimato dos sujeitos de pesquisa.

de Magistério. A *professora Ana*, no entanto, está no Magistério apenas há seis anos. No momento em que participaram do processo formativo, a *professora Renata* lecionava para o 1º ano, a *professora Ana* para o 2.º ano e a *professora Marcela* para o 5º ano.

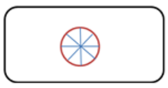
O questionário era composto por 12 questões, por meio das quais procuramos analisar as estratégias de resolução, apresentadas pelas professoras investigadas, as situações parte-todo e o quociente com frações em diferentes contextos. Escolhemos tais situações, pois elas são indicadas nos materiais de apoio ao currículo oficial das escolas nas quais as participantes trabalhavam. Vale destacar, entretanto, que suprimimos a análise detalhada de algumas dessas questões em virtude do espaço destinado a este artigo.

Análise e discussão dos dados

Para melhor compreensão do leitor, trazemos nesta seção a descrição de cada situação proposta no questionário, seguida de sua análise. A primeira situação tinha o propósito de analisar o conhecimento das professoras acerca do conteúdo representação de fração em situações parte-todo, no caso, a identificação da representação figural (parte-todo) da fração $\frac{7}{12}$ entre quatro alternativas. Tal item foi respondido por todas as professoras, sem deixar qualquer indício do esquema de resolução adotado, e pudemos inferir que a resolução, de certa forma, foi imediata. O mesmo ocorreu com a segunda situação – semelhante a essa. Logo, podemos considerar que as professores investigadas possuem o conhecimento da identificação da representação figural, tido como comum por Ball, Thames e Phelps (2008).

A situação 3, apresentada a seguir no Quadro 2, foi inspirada em Rodrigues (2005), com o objetivo de verificar a compreensão das professoras em relação à conservação da unidade de referência em situações parte-todo.

Quadro 2 – Resposta das professoras Marcela e Renata – Situação parte-todo – Unidade de Referência

SITUAÇÃO	Na padaria do Senhor Joaquim são oferecidas pizzas como a representada a seguir  O garçom foi retirar duas mesas - mesa 1 e mesa 2- e observou que os fregueses não comeram todos os pedaços de pizza. Mesa 1 Mesa 2  Analisando a situação podemos afirmar que: a) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 1 é b) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 2 é

PROFESSORA ANA	Analisando a situação podemos afirmar que: a) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 1 é $\frac{3}{8}$. b) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 2 é $\frac{19}{16}$.
PROFESSORA RENATA	Analisando a situação podemos afirmar que: a) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 1 é $\frac{3}{8}$. b) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 2 é _____. $1\frac{1}{8}$
PROFESSORA MARCELA	Analisando a situação podemos afirmar que: a) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 1 é $\frac{3}{8}$. b) A fração de pizza que representa a quantidade da sobra observada na Mesa 2 é $1\frac{1}{8}$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A análise das respostas nos permitiu observar que as três professoras representaram corretamente a fração referente ao item “a” – Quadro 2 –, identificando o todo e as partes. No tocante à fração correspondente ao item “b” da situação, constatamos que as professoras *Marcela* e *Renata* representaram a fração na forma mista.

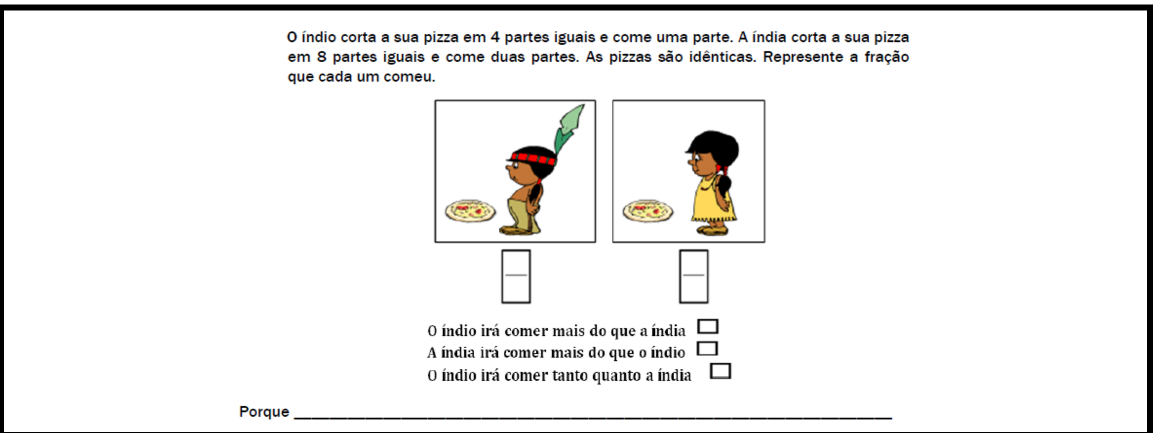
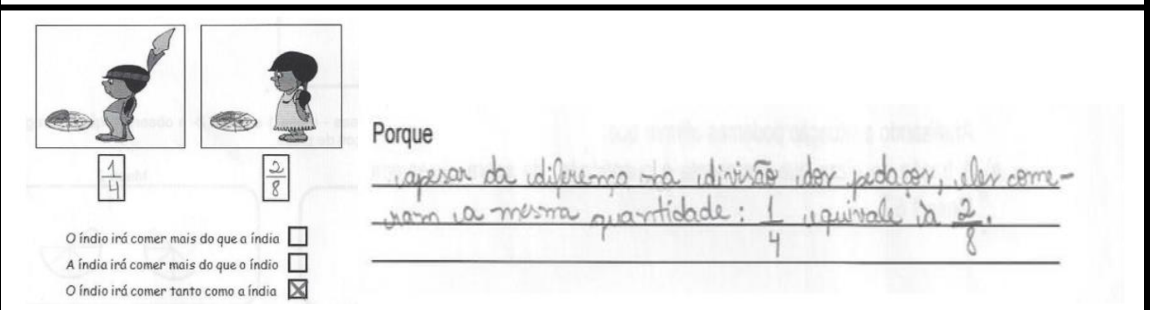
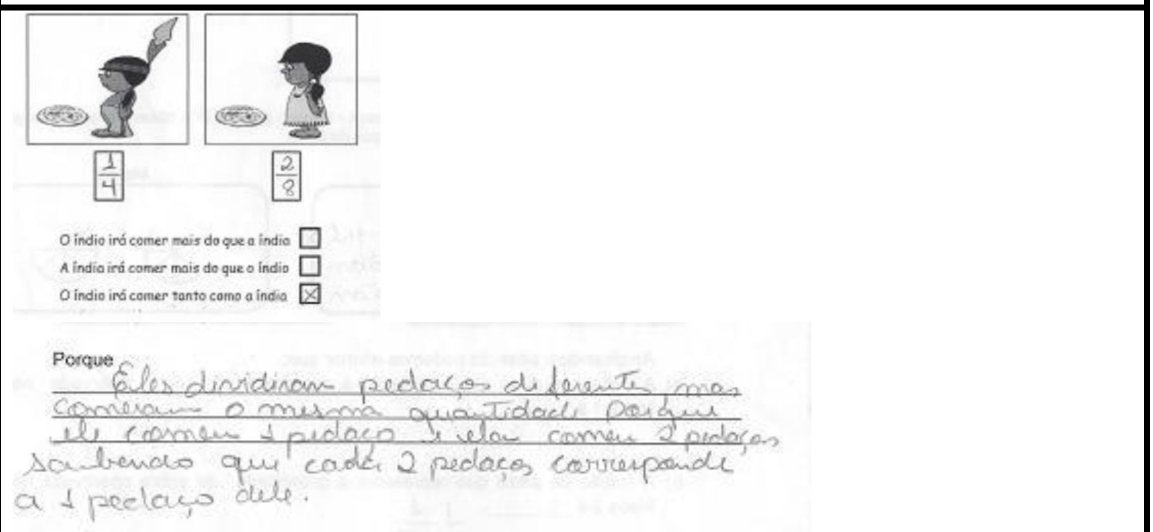
A *professora Ana*, no entanto, fez uma representação que não condiz com a fração de pizza correspondente ao que havia sobrado na segunda mesa. Nesse caso, vimos que ela modificou a unidade de referência ao considerar as duas pizzas da mesa 2 como unidade de referência, e não a “fração de pizza”.

A compreensão do papel da unidade no conjunto dos números racionais é um desafio pesquisado por educadores matemáticos já há bastante tempo. No final da década de 80, investigadores como Kieren (1988) e Mack(1990) enfatizavam a complexidade dessa ideia nesse conjunto numérico, discutiam, sobretudo, acerca das dificuldades encontradas por alunos do Ensino Fundamental. Isso também foi notado nos anos 2000 como nos estudos de Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) e Rodrigues (2005). Os primeiros pesquisadores observaram dificuldades de 746 crianças do Ensino Fundamental (11-12 anos); já Rodrigues (2005) também chegou a resultados semelhantes ao analisar o desempenho de 63 estudantes do final da educação básica (15-18 anos). Em nosso estudo, verificamos que a compreensão do papel da unidade não parece ser um conhecimento consolidado também pela *professora Ana*.

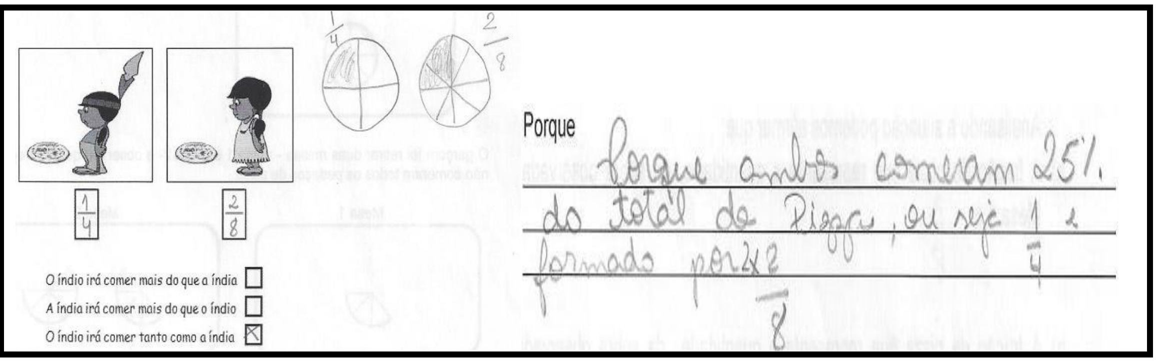
Nesse sentido, acreditamos que isso poderá dificultar sua atividade profissional docente, sobretudo, quando essa professora precisar ensinar esse conteúdo, uma vez que, sob nosso ponto de vista, esse seria um *conhecimento comum do conteúdo* necessário ao ensino, conforme discutido por Ball, Thames e Phelps (2008). Consideramos que a compreensão do conceito de fração na perspectiva parte-todo pressupõe também o entendimento da necessidade de conservar a unidade de referência. Dessa forma, podemos dizer que as professoras *Marcela* e *Renata* mostraram aqui utilizarem-se desse conhecimento para resolver a situação; todavia, isso parece não ter ocorrido com a *professora Ana*.

Para analisar *conhecimento comum* acerca da equivalência de frações, propusemos a situação a seguir.

Quadro 3 – Resposta das professoras – Situação parte-todo – Equivalência de frações

SITUAÇÃO	 O índio corta a sua pizza em 4 partes iguais e come uma parte. A índia corta a sua pizza em 8 partes iguais e come duas partes. As pizzas são idênticas. Represente a fração que cada um comeu. O índio irá comer mais do que a índia ☐ A índia irá comer mais do que o índio ☐ O índio irá comer tanto quanto a índia ☐ Porque ______
PROFESSORA ANA	 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ O índio irá comer mais do que a índia ☐ A índia irá comer mais do que o índio ☐ O índio irá comer tanto como a índia ☒ Porque apesar da diferença na divisão dos pedaços, eles comeram a mesma quantidade: $\frac{1}{4}$ equivale à $\frac{2}{8}$.
PROFESSORA RENATA	 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ O índio irá comer mais do que a índia ☐ A índia irá comer mais do que o índio ☐ O índio irá comer tanto como a índia ☒ Porque Eles dividiram pedaços diferentes mas comeram a mesma quantidade porque ele comeu 1 pedaço e ela comeu 2 pedaços sabendo que cada 2 pedaços corresponde a 1 pedaço dele.

PROFESSORA MARCELA



Fonte: Elaborado pelos autores.

A análise das resoluções revelou que as três professoras investigadas identificaram a equivalência de frações nessa situação. Suas argumentações foram diversas: a *professora Renata* utilizou-se da ideia de correspondência; a *professora Marcela* também fez uso da ideia da proporcionalidade; já *professora Ana* referiu-se à quantidade de pedaços resultante. Nesse sentido, consideramos que, para a situação dada, nos pareceu que as professoras tinham esse conhecimento comum da equivalência, conforme descrito por Ball, Thames e Phelps (2008). Acreditamos que isso permitiria ao professor saber utilizar a ideia de equivalência, conforme prevista no currículo dos estudantes. Entretanto, julgamos que deveríamos discutir durante a formação os diferentes argumentos adotados.

Quanto à compreensão das participantes em relação à ordenação de fração em situações que envolviam o significado parte-todo, propusemos duas situações, mas para esse artigo analisamos apenas uma delas – Quadros 4. Na situação aqui apresentada, investigamos também a relação do *conhecimento do conteúdo,* com o *conhecimento do conteúdo e do estudante e do ensino* descritos por Ball, Thames e Phelps (2008). Nela, solicitamos às participantes que fizessem a sua análise e propusessem uma intervenção de ensino.

Quadro 4 – Situação parte-todo na qual buscou analisar a relação entre conhecimentos descritos por Ball *et al*. (2008)

Bruna e Victor receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada uma. Bruna comeu $\frac{3}{5}$ do chocolate dela e Victor comeu $\frac{3}{4}$ do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Bruna ou Victor? Um aluno deu a seguinte resposta: Bruna e Victor comeram o mesmo tanto, porque os dois comeram três pedaços dos seus chocolates.

- Na sua concepção a resposta do aluno está:
(   ) Certa   (   ) Errada
- Por que está certo? ou Por que está errado?
- Como você resolveria o problema? Você pode resolver por escrito, por meio de operações ou qualquer tipo de representação.
- Que estratégia de ensino você usaria para explicar para a classe a melhor forma de resolver o problema?

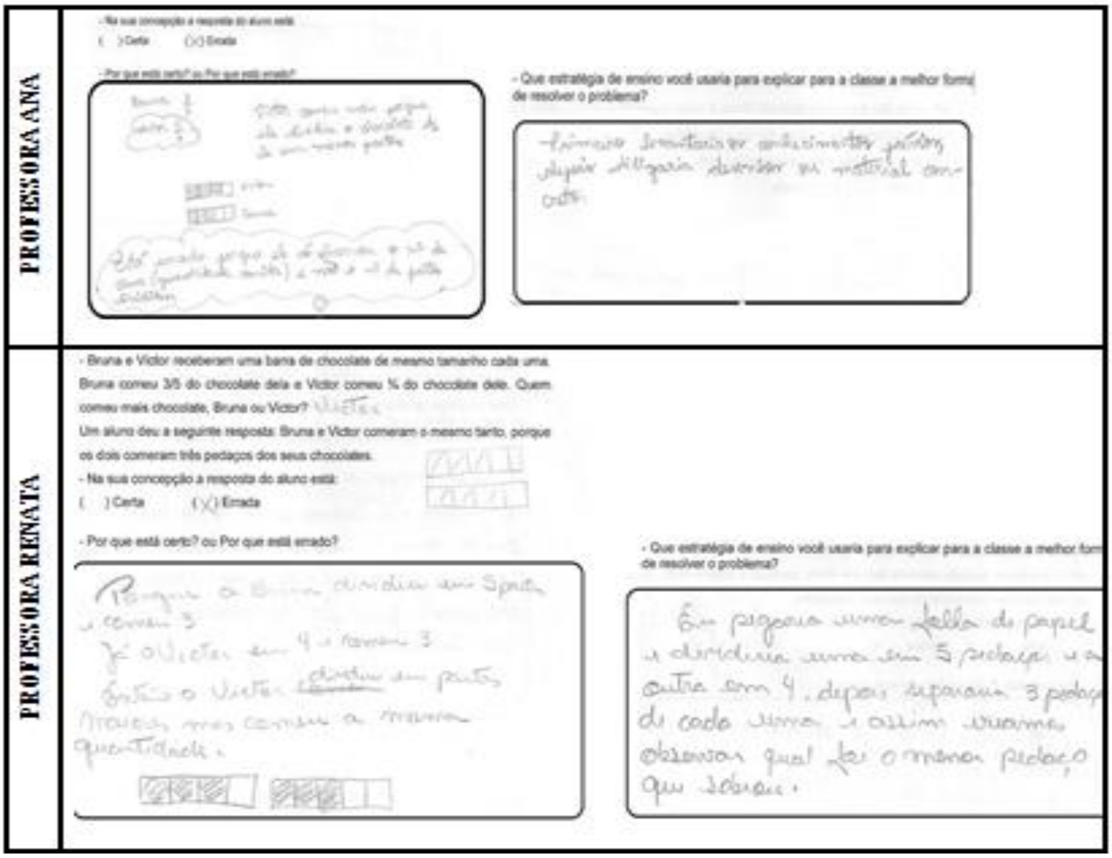
Fonte: Elaborado pelos autores.

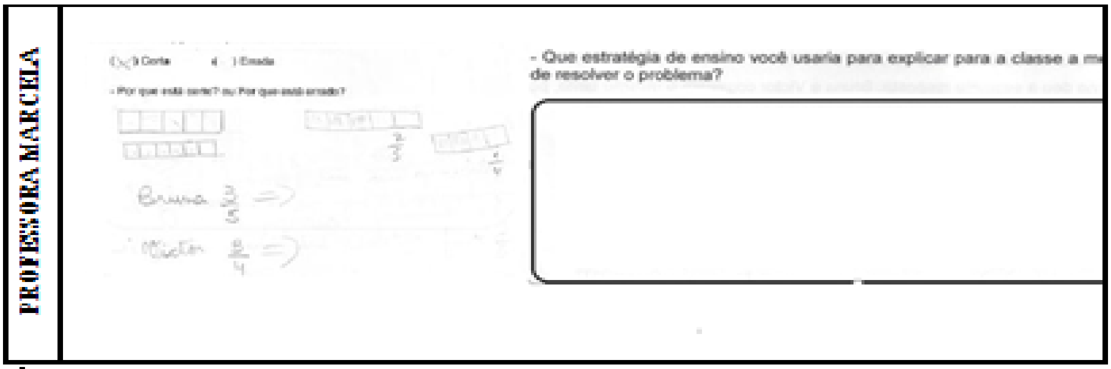
As soluções apresentadas no Quadro 5 nos permitiram identificar que as *professoras Ana* e *Renata* responderam corretamente ao primeiro item, ao considerarem que a resposta do aluno estava errada. Verificamos que, para justificar suas respostas, as professoras mostraram raciocínio semelhante: ambas se referiram à quantidade de partes em que cada chocolate havia sido dividido. A *professora Ana* fez alusão à resposta do aluno, considerando que ele observou apenas o numerador, e não o número de partes divididas. Nesse sentido, ela parece ter percebido a relação existente entre o numerador e o denominador. A *professora Renata*, no entanto, referiu-se apenas à quantidade de pedaços, não os relacionando à fração correspondente.

A *professora Marcela*, por sua vez, julgou, de maneira equivocada, que a resposta do aluno estava correta. As análises dos registros da docente indicam que ela considerou, assim como o aluno, apenas a quantidade de pedaços que Bruna e Victor comeram da pizza, três pedaços, sem levar em conta que as unidades de medida eram diferentes, ou seja, quartos e quintos. Vale ressaltar que nesse tipo de situação esperávamos que as educadoras observassem as relações assimétricas da fração: a ideia de relação inversa entre denominador e a quantidade correspondente à fração como descrita por Nunes, Bryant, Pretzlik e Hurry (2003).

Quadro 5 – Resposta dadas pelas *Professoras Renata, Ana e Marcela*

Situação parte-todo – Ordenação de frações





Fonte: Elaborado pelos autores.

No tocante às estratégias de ensino para essa situação, somente as *professoras Ana e Renata* apresentaram sugestões – Quadro 5. Nesse sentido, podemos inferir, em sintonia com Ball, Thames e Phelps (2008), acerca dos *conhecimentos de conteúdo e de ensino* e os *conhecimentos de conteúdo e de estudantes*, que as dificuldades encontradas pela professora Marcela quanto à compreensão da relação de ordem entre as frações limitaram sua interpretação do pensamento do aluno e, consequentemente, sua proposição de estratégias de ensino para que ele superasse suas dificuldades.

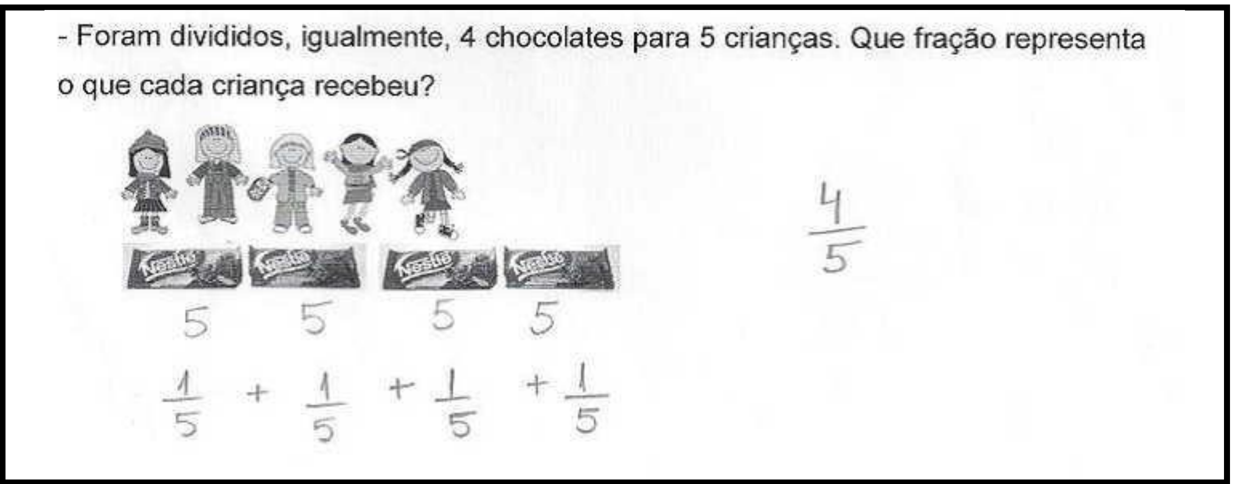
No que concerne às estratégias propostas pelas outras professoras, observamos que a *professora Ana* apenas referiu-se aos conhecimentos prévios, utilização de desenhos e materiais concretos, sem, contudo, explicitar mais claramente como desenvolveria a aula. A *professora Renata*, apesar de ter apresentado uma estratégia válida, não fez qualquer alusão à importância em considerar a equivalência de área (esse é um aspecto fundamental no ensino de frações), uma vez que não explicitou que cortaria a folha em pedaços com a mesma área.

No tocante aos domínios dos *conhecimentos do conteúdo e do ensino e do estudante* com o *comum do conteúdo*, verificamos, assim como Ball, Thames e Phelps (2008), não ser uma relação direta ter um determinado conhecimento comum, no caso da ordenação de frações, e igualmente ser possuidor dos *conhecimentos necessários ao ensino*. Nesse exemplo, notamos o quanto foi complexa a tarefa de propor intervenção para os participantes deste estudo.

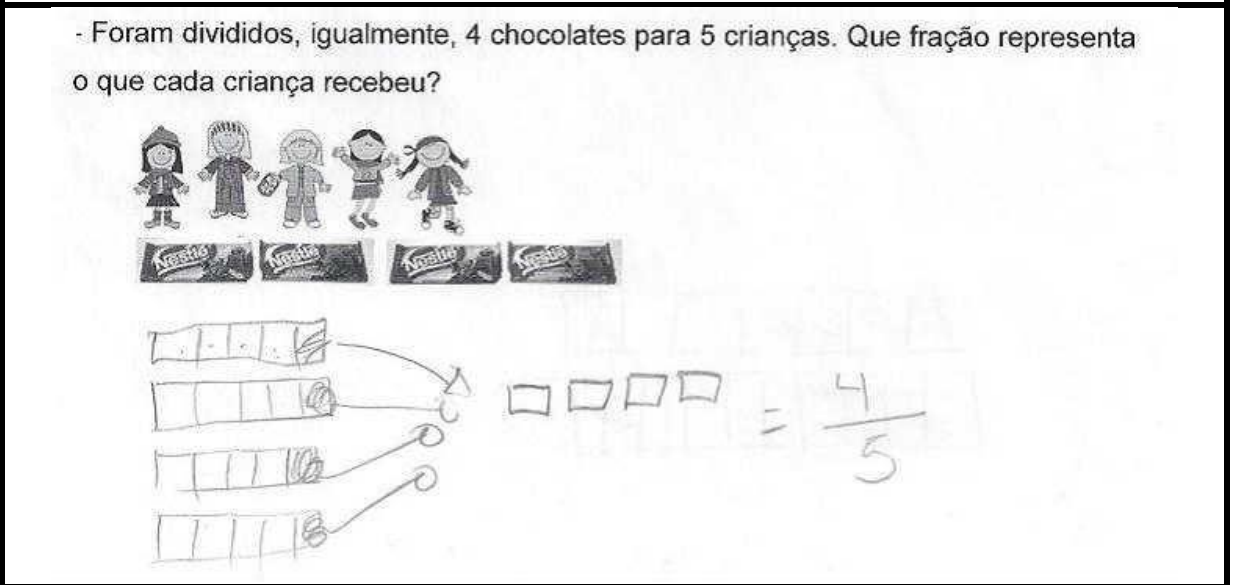
Além das situações envolvendo o significado parte-todo, procuramos analisar as respostas das professoras a situações compreendendo quociente. Na primeira, solicitamos a representação da fração referente a uma dada quantidade, por meio da qual seria possível perceber a compreensão acerca de um problema em que estivesse presente a ideia de divisão. Inicialmente, observamos – Quadro 6 – que as *professoras Renata* e *Ana* representaram a fração que indicava a quantidade de chocolate distribuída para cada criança. A *professora Marcela*, no entanto, mesmo representando a fração de chocolate recebida por cada uma das crianças, não representou a fração que resultaria na quantidade de chocolate que cada criança recebeu.

Quadro 6 – Respostas das Professoras – Situação-quociente – Representação de frações

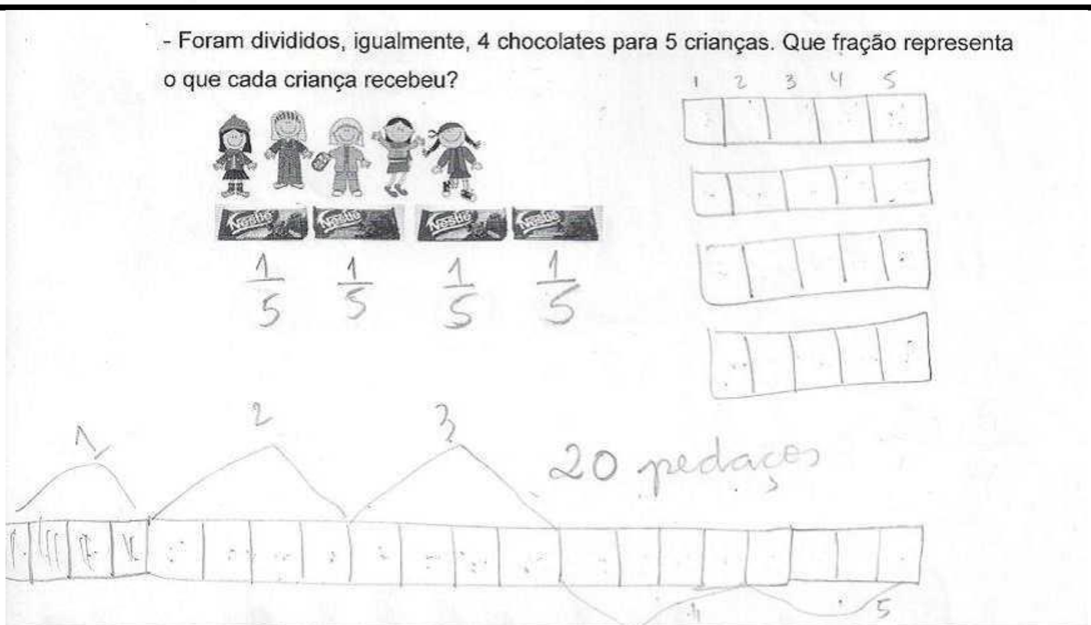
PROFESSORA ANA



PROFESSORA RENATA



PROFESSORA MARCELA



Fonte: Elaborado pelos autores.

Percebemos na estratégia de resolução que as professoras aqui investigadas mobilizaram o mesmo teorema em ação, que deu origem a um esquema já apontado por pesquisadores como

Carperter (1994) e observado em outros estudos como os de Garcia Silva (2007), que se constitui em dividir cada barra de chocolate em partes iguais e distribuir uma parte para cada uma das crianças. Como as professoras se utilizaram da partição para resolver a situação, julgamos que, de modo geral, mesmo as que responderam corretamente parecem não ter identificado uma ideia fundamental que só se manifesta em situações-quociente: a presença de duas variáveis que podem ser interpretadas a partir da divisão entre elas. Esse problema, por exemplo, pode ser analisado como a representação de quatro chocolates divididos por cinco crianças, como também a parte que cada criança recebeu do chocolate.

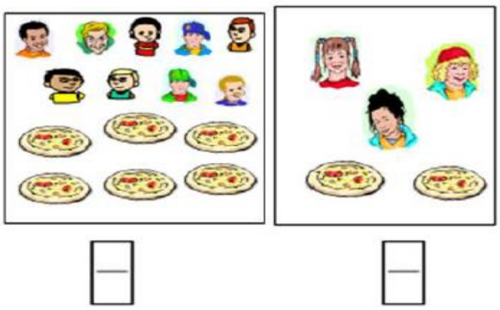
Depois dessa, propusemos uma segunda situação, com a qual pretendíamos ter mais evidências se havia por parte das participantes a compreensão de que a fração também pode ser representada por meio de uma divisão. Não detalharemos tal situação, por ser semelhante à anterior, pois também tivemos resultado similar aos alcançados até agora, ou seja, utilizaram-se da partição e adicionaram frações com o mesmo denominador. Dessa forma, analisando a resolução das participantes para as duas situações, pudemos concluir que elas não possuíam esse *conhecimento especializado* de que a fração pode ser representada por uma divisão. Classificamos esse conhecimento do significado quociente como especializado, uma vez que ele seria um conteúdo matemático especialmente importante para o ensino das frações.

Em relação à compreensão das professoras acerca da equivalência em situações-quociente, apresentamos uma situação em que eram solicitadas a representação da fração, a relação de equivalência e, por fim, a justificativa da resposta dada – Quadro 7.

Quadro 7 – Respostas das professoras – Situação-quociente – Equivalência de frações

SITUAÇÃO

Nove meninos irão dividir igualmente 6 pizzas e não deve sobrar nada.Três meninas irão dividir igualmente 2 pizzas e também não deve sobrar nada. As pizzas são idênticas. Represente a fração que cada criança irá receber de pizza.



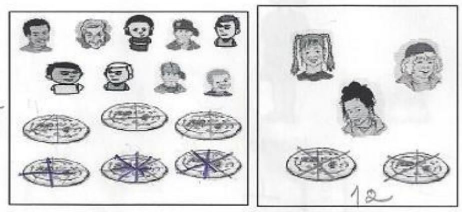
Cada menino come mais do que cada menina ☐
Cada menino come menos do que cada menina ☐
Cada menino come tanto quanto cada menina ☐

Porque____

PROFESSORA ANA

$\frac{4}{36} : \frac{1}{9}$

$\frac{1}{2} = 9$



12

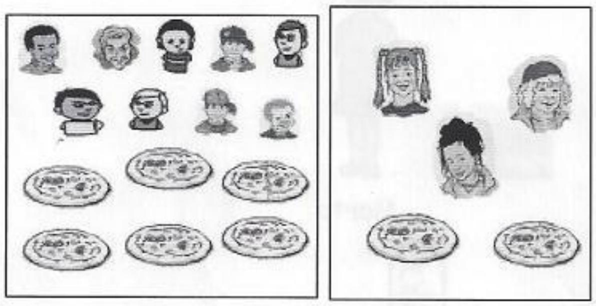
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\boxed{\frac{4}{6}}$ $\boxed{\frac{4}{6}}$

Cada menino come mais do que cada menina ☐
Cada menino come menos do que cada menina ☐
Cada menino come tanto como cada menina ☒

Porque dividimos todas as pizzas em 6 pedaços e deu a mesma quantidade para cada um: 4 pedaços.

PROFESSORA RENATA

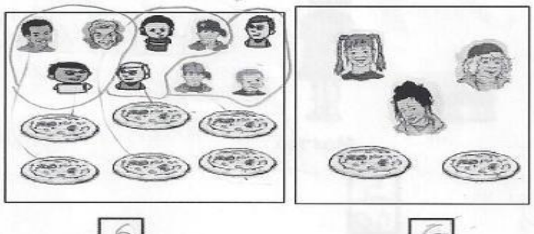


$\boxed{\frac{4}{6}}$ $\boxed{\frac{4}{6}}$

Cada menino come mais do que cada menina ☐
Cada menino come menos do que cada menina ☐
Cada menino come tanto como cada menina ☒

Porque Dividimos todas as pizzas em 6 pedaços tanto as meninas quanto os menino comeram 4 pedaço.

PROFESSORA MARCELA



$\boxed{\frac{6}{54}}$ $\boxed{\frac{6}{18}}$

Cada menino come mais do que cada menina ☐
Cada menino come menos do que cada menina ☐
Cada menino come tanto como cada menina ☒

Porque Dividimos cada pizza em 9 pedaços e aí agrupamos os meninos cada grupo de 3 comerão duas pizzas.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Analisando as soluções apresentadas, bem como as justificativas, percebemos que há indícios de que as *professoras Ana e Renata* demonstraram compreender a lógica da equivalência entre as quantidades de pedaços. Julgamos importante comentar os itens que mostram o raciocínio utilizado pelas professoras na identificação de tal invariante. No tocante à representação, verificamos que a *professora Ana* indicou, no espaço destinado a apresentar a resposta, a fração $\frac{4}{6}$ para ambos (meninos e meninas). Observamos aqui haver indícios de que a professora considerou de forma correta como referência para o todo “uma pizza”. Todavia, os registros feitos ao lado da situação nos fazem acreditar que, embora ela tenha respondido corretamente que ambos comeram a mesma quantidade, o processo de resolução não ocorreu de maneira imediata. A princípio, a participante considerou como o todo referência o número total de partes em que todas as pizzas foram divididas: em 36 partes a dos meninos e em 12 partes a das meninas. Em seguida, distribuiu as partes e descobriu que tanto os meninos como as meninas comeram 4 partes, o que, possivelmente, gerou as frações $\frac{4}{36} e \frac{4}{12}$, respectivamente. Ao final, a *professora Ana* simplificou as duas frações.[2] Entretanto, ela abandonou essa ideia inicial, passando a tomar como unidade de referência a fração de pizza. Igualmente, a *professora Renata* justifica, assim como a da *professora Ana*, por meio da ideia de partição. Além disso, para essa situação, a *professora Renata*, assim como a *professora Ana*, manteve a unidade de referência, tomando como base uma pizza.

A *professora Marcela*, no entanto, parece ter identificado apenas a equivalência entre as quantidades de pedaços de pizzas que cada menino e cada menina receberia, ao perceber a proporcionalidade entre as partes, sem, contudo, apontar a equivalência entre as quantidades fracionárias. Notamos ainda que a professora dividiu os 9 pedaços de cada pizza entre três meninos, resultando em 3 pedaços. Como disse que cada menino receberia 2 pizzas, concluiu que cada um receberia 6 pedaços, o que a levou a representar incorretamente a fração, pois considerou como unidade de referência o número total de partes em que todas as pizzas foram divididas: em 54 fatias a dos meninos e em 18 fatias a das meninas, e não as partes em que uma pizza foi dividida. Com isso, ela mudou o referencial. Portanto, podemos inferir, assim como Kieren (1988), Mack(1990), Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) e Rodrigues (2005), que as participantes, ao utilizarem do esquema de partição, não tinham em mente a necessidade de manter a unidade de referência. Esses registros nos sugerem que, com as professoras, ocorreu o que Nunes (2005) observou quando

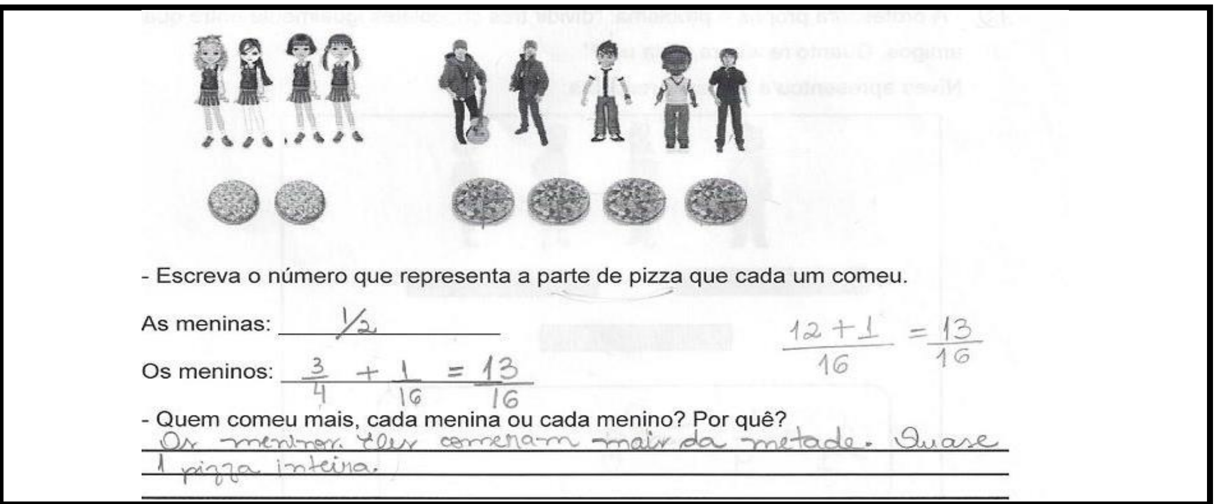
[2] Durante a entrevista realizada, um ano depois da formação, a *professora Ana* nos informou que onde se lê $\frac{4}{36}:\frac{1}{9}$ leia-se $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

investigou alunos, ou seja, não houve, para essa situação, a transferência imediata do conhecimento de parte-todo para quociente. Assim, consideramos que deveríamos retomar essa discussão durante o processo formativo.

Com a proposição da situação apresentada no quadro 8 buscávamos verificar a compreensão das professoras em relação à ordenação de frações em situações-quociente. Nela solicitamos a representação da fração e a análise da relação de ordem com a respectiva justificativa. As professoras *Ana* e *Renata* identificaram a ordenação entre as frações apresentadas e suas justificativas foram bem semelhantes, como podemos perceber nas figuras no quadro a seguir:

Quadro 8 – Respostas das professoras – Situação-quociente – Ordenação de frações

Professora Ana


- Escreva o número que representa a parte de pizza que cada um comeu.

As meninas: 1/2

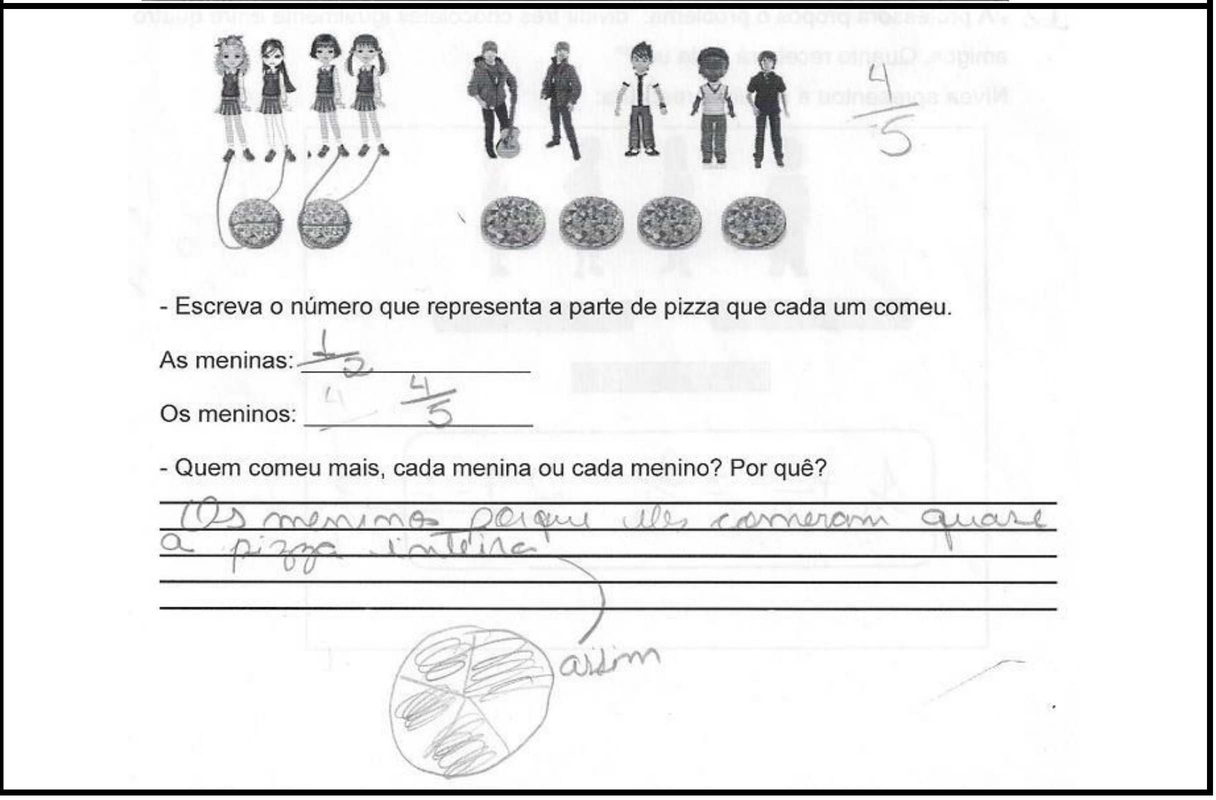
Os meninos: $\frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$

$\frac{12+1}{16} = \frac{13}{16}$

- Quem comeu mais, cada menina ou cada menino? Por quê?

Os meninos eles comeram mais da metade. Quase 1 pizza inteira.

Professora Renata


4/5

- Escreva o número que representa a parte de pizza que cada um comeu.

As meninas: 1/2

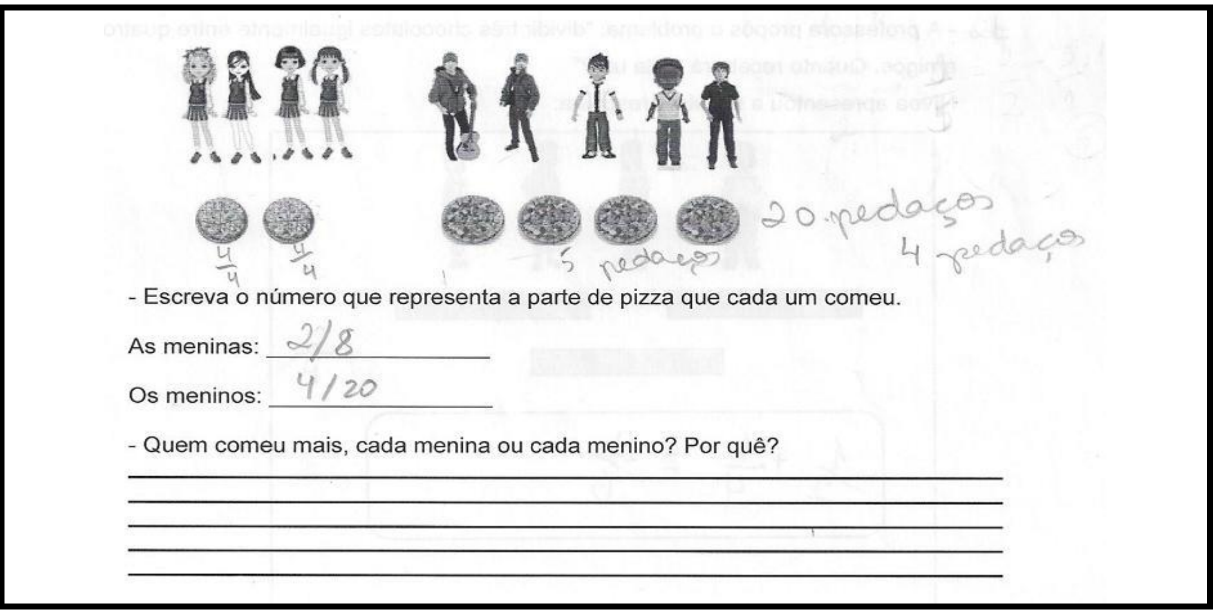
Os meninos: 4/5

- Quem comeu mais, cada menina ou cada menino? Por quê?

Os menino porque eles comeram quase a pizza inteira

assim

Professora Marcela


4/4 4/4 5 pedaços 20 pedaços 4 pedaços

- Escreva o número que representa a parte de pizza que cada um comeu.

As meninas: 2/8

Os meninos: 4/20

- Quem comeu mais, cada menina ou cada menino? Por quê?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Observamos que, embora tenha identificado a ordenação, a *professora Ana* demonstrou dificuldade ao representar a fração de pizza que cada menino comeu. Percebemos que a professora, possivelmente, pensou em dividir cada uma das pizzas dos meninos em quartos. Ao dividir os 16 pedaços entre os 5 meninos, chegou à conclusão de que cada um receberia 3 pedaços de quartos; por isso, o registro da fração $\frac{3}{4}$. Esse raciocínio inicial poderia ser uma possibilidade de chegar à resolução correta. Entretanto, quando a professora realizou a divisão do pedaço que representa $\frac{1}{4}$ de pizza restante entre os 5 meninos, ela equivocou-se duplamente: primeiro, ao mudar o referencial que inicialmente era de 1 pizza e passou a ser de 4 pizzas $(\frac{1}{16}\, de\ quatro\ pizzas)$; segundo, ao não considerar que essa parte seria dividida entre os 5 meninos. Acreditamos que, possivelmente, os dois enganos sejam de natureza distinta: enquanto o primeiro refere-se a um erro conceitual, o segundo pode ter ocorrido por desatenção. Isso nos faz refletir sobre as implicações dessas dificuldades na prática pedagógica, especialmente da relativa à conservação da unidade, uma vez que tal ideia é fundamental, sobretudo quando o professor se utiliza do significado parte-todo.

Já a *professora Renata* parece não ter apresentado grandes dificuldades: utilizando-se do esquema de partição, fez a correspondência entre a quantidade de pizzas. Um ponto interessante se constitui no fato de que as professoras partiram da ideia de metade para fazer a comparação entre as quantidades e chegarem à conclusão de que cada menino comeu uma quantidade maior de pizza do que cada menina. Isso nos remete a estudos como os de Spinillo e Bryant (1991), Nunes e Bryant (1997), Brizuela (2006) e Spinillo e Cruz (2008), os quais discutem a importância do referencial de metade quando a proposta se constitui na quantificação de fração. Nesse sentido, para essa situação, acreditamos que as professoras compreenderam a relação existente entre o numerador e o denominador.

Todavia, vale ressaltar que nenhuma delas adotou como estratégia a procura de frações equivalentes que representassem as duas situações ($\frac{1}{2}$ de pizza e $\frac{4}{5}$ de pizza), a fim de confrontar as duas situações, possivelmente porque a simples comparação com a ideia de metade permitiu resolver o problema. Salientamos ainda que, para confirmar se essa estratégia seria utilizada ou não pelas professoras, poderíamos ter apresentado uma situação na qual as frações a serem comparadas não possibilitassem a comparação com a metade; poderíamos, por exemplo, pedir a comparação entre as frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{9}{11}$.

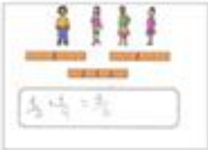
A *professora Marcela* parece não ter reconhecido tal invariante, uma vez que não respondeu quem comeu mais. Analisando os registros do protocolo, eles sugerem que o raciocínio inicial da *professora Marcela* em relação à quantidade de pizza que cada menina comeu está correto: ao dividir cada pizza em 4 pedaços, considerou que cada menina comeu $\frac{1}{4}$ de pizza. No entanto, ao juntar as duas partes de pizza que cada menina comeu, levou em conta o total de pedaços das duas pizzas, adicionando numerador e denominador. O mesmo raciocínio foi utilizado para os meninos.

As análises feitas até o momento acerca das resoluções de situações que envolviam a ideia de quociente nos permitiram perceber que o *conhecimento especializado do conteúdo* (Ball, Thames e Phelps, 2008) – introdução do conceito de frações – encontra-se fragilizado, dado que as professoras demonstraram não reconhecer a situação como um quociente, o que, em alguns casos, gerou dificuldades na resolução. Observando o ocorrido, é possível inferir que a falta de domínio desse significado pode comprometer o conhecimento necessário para o ensino da introdução de frações.

Quanto ao que Ball, Thames e Phelps (2008) definem como *conhecimento de conteúdo e dos estudantes*, procuramos verificar, por meio de uma situação na qual era indicado um erro de uma aluna, e solicitamos que as professoras o avaliassem; além disso, solicitamos que indicassem uma proposta de intervenção para o ensino.

A *professora Marcela* não apresentou resposta para essa situação. As *professoras Ana* e *Renata* avaliaram corretamente, ao considerarem que a aluna errou, e seus comentários estavam baseados no desenvolvimento da técnica do algoritmo, uma vez que ambas fazem referência apenas ao erro do cálculo da adição ou à ausência do cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC). Em relação às intervenções, as duas sugeriram estratégias ligadas ao procedimento de cálculo. Notamos que nenhuma das professoras apontou o significado quociente como possibilidade para introduzir frações. Elas não fizeram referência alguma acerca da importância de aprofundar a equivalência de frações com os alunos – Quadro 9.

Quadro 9 – Respostas das professoras – Situação-quociente – Proposta de intervenção

Situação: A professora propôs o problema: "dividir três chocolates igualmente entre quatro amigos. Quanto receberá cada um?". Nivea apresentou a seguinte resposta:  O que você pode afirmar a respeito da resolução apresentada pela aluna? Quais propostas você indicaria a professora para intervir diante da resposta do aluno?	
Resoluções:	
Professora Ana	***Professora Renata***
Ela dividiu muito bem, mas não soube fazer a adição de frações. O MMC deveria ser 4, não 6. Não podemos somar os denominadores. Trabalhar operações com frações.	Ela acertou na representação mas errou na operação na adição não se pode somar os denominadores, e sim tirar o M.M.C. Trabalhar adição de frações

Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim sendo, consideramos que as respostas das professoras indicaram limitações também em relação ao *conhecimento de conteúdo e dos estudantes e do ensino*, como o descrito por Ball, Thames e Phelps (2008), seja pela dificuldade de analisar a situação pela própria limitação de conhecimento, seja por focar a resolução nos procedimentos de cálculo. Nesse sentido, analisando os resultados aqui apresentados à luz das teorias de Ball, Thames e Phelps (2008), acreditamos que a limitação do domínio desse conteúdo específico, ou seja, a dificuldade de reconhecimento e compreensão do significado quociente da fração, implicaria igual limitação de conhecimentos para o ensino da introdução dos diferentes significados das frações.

Considerações finais

Tomando como base o referencial teórico adotado nesta análise, chamamos atenção para algumas evidências sobre o conhecimento profissional docente dessas professoras. Em relação à representação da fração, observamos que elas se utilizavam da ideia de dupla contagem para situações parte-todo. De maneira geral, as participantes conseguiram representar corretamente as frações correspondentes às quantidades propostas em cada situação.

Todavia, não ficou evidente se elas reconheciam a relação existente entre essas duas quantidades como um quociente uma vez que suas estratégias de resolução desse tipo de situação eram baseadas somente em técnicas de partição ou procedimentos de cálculo. Isso nos deu indícios de que, possivelmente, o ensino desenvolvido em aula se dá a partir do significado parte-todo. Além disso, por meio da análise dessas informações podemos dizer que as professoras parecem não encontrar dificuldades para representar por meio de fração situações parte-todo apresentadas em figuras. No entanto, esse ensino parece ser predominantemente procedimental, assim como Costa (2011) observou.

No tocante à compreensão dos invariantes equivalência e ordem de frações, percebemos que as professoras investigadas, de maneira geral, reconheciam relação existente entre as quantidades fracionárias, quando elas estavam em situações envolvendo o significado parte-todo. Entretanto, notamos que o mesmo não ocorreu com o significado quociente. Aliado a isso, observamos que, nas situações em que elas analisaram as respostas de aluno, não foi ressaltado por quaisquer das participantes a necessidade de retomar a ideia de equivalência, uma vez que foi essa limitação que levou o estudante a dar aquela resposta.

Finalmente, é importante ressaltar que neste estudo observamos haver, por parte das professoras envolvidas, certa incompreensão do papel da unidade de referência quando elas trabalham com o tema fração. Esse conhecimento parece não estar estabilizado e isso mostrou que, em decorrencia disso, em alguns momentos, outros conhecimentos necessários ao ensino das frações ficaram comprometidos.

Nessa perspectiva, queremos chamar a atenção para a necessidade de aprofundamento, em cursos de formação de professores, dos conceitos subjacentes às frações, de modo que em situação de ensino os professores possam ser capazes de perceber os equívocos cometidos pelos alunos, de analisá-los e de sugerir encaminhamentos que os ajudem a superar possíveis dificuldades.

Finalmente, é importante salientar que os resultados aqui destacados refletem o domínio dessas professoras no início de nossa investigação e que esses dados foram utilizados para fazer um primeiro desenho de um processo formativo no qual discutimos e refletimos acerca da compreensão dessa temática e do seu ensino.

Portanto, com base nessas informações, as sessões de formação foram dedicadas a estudos dos significados das frações no qual aprofundamos as discussões sobre o significado parte-todo e discutimos a ideia de medida. Além disso, promovemos ainda vivências de metodologias diversificadas, das quais destacamos, só a título de exemplo, o trabalho desenvolvido com o

Tangram, pelo qual conseguimos retomar discussões acerca da conservação de área, equivalência de frações e observação da unidade de referência. Notamos, ao final do processo formativo, que houve por parte das participantes (re)significação de conhecimentos, constituindo, assim, avanço significativo em relação aos dados aqui apresentados.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, p. 389-407, 2008.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

BRIZUELA, B. M. Young children's notations for fractions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 62, p. 281-305, 2006.

CAMPOS, T. M. M. Sobre ensino e aprendizagem de frações. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, ano 8, n. 11, p. 239-246, 2013.

CANOVA, R. F. **Um Estudo das Situações Parte-todo e Quociente no Ensino e Aprendizagem do Conceito de Fração**. 196f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNIAN-SP, São Paulo, 2013.

CARPENTER, T. P. **Teaching and learning rational numbers**: proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades. Wisconsim Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madson. 1994.

CHARALAMBOUS, C.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, 64, n. 3, 293-316, 2005.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais**. 4.ed. Petrópolis RJ: Vozes, v.1. 2011.

COSTA, F. M. **Concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados**. 176f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2011.

GARCIA SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente***:* análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2007.

KIEREN, T. **Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development**. In: J. Hiebert an M. Behr (eds) Number Concepts and Operations in the Middle Grades, p.162-80, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum. 1988.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

MACK, N. Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge, **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 21, p. 16-32, 1990.

MAMEDE, E. **The effects of situations on children's understanding of fractions**. These de PhD– Oxford Brookes University, Oxford, 2007.

MONTEIRO CERVANTES, P. B. **Uma formação continuada sobre as frações**. f.86, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNIBAN/SP, São Paulo. 2010.

NUNES, T. **Usando na escola o conhecimento da vida diária**: o caso das frações. Palestra proferida no Sindicato dos Estabelecimentos de Ensino no Estado de São Paulo. Congresso e Feira Saber 2005.

_________BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997.

_________BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; HURRY, J. **The effects of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, Reino Unido, 2003.

PINHEIRO, M. G. C. **Formação de Professores dos anos iniciais:** conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração.206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIAN-SP, São Paulo, 2014.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricula***r*. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

RODRIGUES, W. R. **Números racionais**: um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal.. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

SANTOS, R. S. **Rendimento e estratégias de estudantes concluintes do Ensino Fundamental na resolução de itens de avaliações externas**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNIAN/SP, São Paulo.

SÃO PAULO (ESTADO). **Orientações curriculares do estado de São Paulo anos iniciais do Ensino Fundamental - Matemática**. Versão Preliminar. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. 2014.

SHULMAN, L. "Those who understand: knowledge growth in teaching". In: **Educational Research**. *v. 15, n. 2*, p. 4-14, 1986.

_____________. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. In: **Harvard Educational Review**, *n. 57*, p. 1-22, 1987.

SPINILLO, A. G.; BRYANT, P. Children's proportional judgments: the importance of "half". **Child Development**, v. 62, n. 3, p. 427-440, 1991.

______; CRUZ, M. S. S. Crianças usando o referencial de metade e de inteiro na adição de frações. IN: 2º SIPEMAT, Recife: UFRPE. **Anais do 2º SIPEMAT**, 2008. Disponível em: <http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CDROM%202%20SIPEMAT/artigos/CO-10.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

Submetido em maio de 2016
Aprovado em outubro de 2016