

Ambientes de Geometria Dinâmica no ensino de demonstrações geométricas: uma revisão sistemática de literatura

Ricardo Silva Ribeiro¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS campus Restinga

Josias Neubert Savóis²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS campus Osório

Márcia Rodrigues Notare³

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa qualitativa bibliográfica buscando identificar e analisar as pesquisas publicadas, tanto de abrangência nacional como internacional, envolvendo a temática do ensino de demonstrações geométricas com o auxílio de ambientes de geometria dinâmica. Para atingir este objetivo, realizamos uma Revisão Sistemática de Literatura abrangendo publicações em português, inglês e espanhol, de modo a conseguir uma abrangência de resultados significativos que torne a pesquisa consistente e confiável. A análise realizada teve caráter predominantemente qualitativo, visando ressaltar a relevância das atividades propostas e da metodologia empregada nas pesquisas encontradas. Os resultados mostram que a produção nacional sobre este tema é equiparável às produções internacionais, e que o ambiente de geometria dinâmica mais utilizado pelos professores e pesquisadores da área de ensino de matemática é o software GeoGebra. Esta revisão de literatura mostra que existem poucas publicações que se baseiam em atividades que realmente aproveitam o potencial dos ambientes de geometria dinâmica para produzir conhecimentos sobre demonstrações geométricas a partir da interação dos próprios estudantes com o software, fator determinante para a construção do próprio conhecimento, evidenciando assim a necessidade de novas pesquisas sobre o tema.

Palavras-chave: Demonstrações geométricas; Geometria Dinâmica; Revisão de Literatura; Ensino.

Dynamic Geometry Environments in teaching geometric demonstrations: a systematic literature review

ABSTRACT

¹Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor de matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Restinga, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Presidente João Goulart, 85, Centenário, Torres, RS, Brasil, CEP: 95560-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0614-8826>. E-mail: ricardo.ribeiro@restinga.ifrs.edu.com.br.

²Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande (FURG). Professor de matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Osório, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Joaquim Nunes, 414, centro, Três Forquilhas, RS, Brasil, CEP: 95575-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4332-8263>. E-mail: josias.savois@osorio.ifrs.edu.com.br

³Doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora de matemática na Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Paulo Gama, 110, anexo II, Farroupilha, Porto Alegre, Brasil, CEP: 90040-060. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>. E-mail: marcia.notare@gmail.com.

This article presents a qualitative bibliographical research seeking to identify and analyze published research, both nationally and internationally, involving the theme of teaching geometric demonstrations with the help of dynamic geometry environments. To achieve this objective, we carried out a Systematic Literature Review covering publications in Portuguese, English and Spanish, in order to achieve a range of significant results that make the research consistent and reliable. The analysis carried out was predominantly qualitative in nature, aiming to highlight the relevance of the proposed activities and the methodology used in the research found. The results show that national production on this topic is comparable to international productions, and that the dynamic geometry environment most used by teachers and researchers in the area of mathematics teaching is the GeoGebra software. This literature review shows that there are few publications that are based on activities that really take advantage of the potential of dynamic geometry environments to produce knowledge about geometric demonstrations based on the students' own interaction with the software, a determining factor for the construction of the own knowledge, thus highlighting the need for new research on the topic.

Keywords: Geometric demonstrations; Dynamic Geometry; Literature review; Teaching.

Entornos de geometría dinámica en la enseñanza de demostraciones geométricas: una revisión sistemática de la literatura

RESUMEN

Este artículo presenta una investigación bibliográfica cualitativa que busca identificar y analizar investigaciones publicadas, tanto a nivel nacional como internacional, que involucran el tema de la enseñanza de demostraciones geométricas con ayuda de ambientes de geometría dinámica. Para lograr este objetivo, realizamos una Revisión Sistemática de la Literatura abarcando publicaciones en portugués, inglés y español, con el fin de alcanzar un conjunto de resultados significativos que hagan la investigación consistente y confiable. El análisis realizado fue predominantemente de carácter cualitativo, con el objetivo de resaltar la relevancia de las actividades propuestas y la metodología utilizada en la investigación encontrada. Los resultados muestran que la producción nacional sobre este tema es comparable a la producción internacional, y que el entorno de geometría dinámica más utilizado por docentes e investigadores en el área de la enseñanza de las matemáticas es el software GeoGebra. Además, esta revisión de la literatura muestra que existen pocas publicaciones que se basen en actividades que realmente aprovechen el potencial de los entornos de geometría dinámica para producir conocimiento sobre demostraciones geométricas a partir de la propia interacción de los estudiantes con el software, factor determinante para la construcción del propio conocimiento, destacando así la necesidad de nuevas investigaciones sobre el tema.

Palabras clave: Demostraciones geométricas; Geometría Dinámica; Revisión de literature; Enseñanza.

INTRODUÇÃO

Estabelecer um panorama geral a respeito do ensino e aprendizagem escolar de qualquer área do conhecimento não é uma tarefa fácil, nem mesmo é algo que se obtém um consenso entre os pesquisadores, docentes e comunidade escolar em geral. Referente à área da Educação Matemática não é diferente. Muitas pesquisas apontam novas tendências e metodologias de ensino, propostas de atividades que podem contribuir com a aprendizagem dos estudantes ou sugestões de uso de recursos tecnológicos digitais eficazes na construção dos conhecimentos matemáticos, tais como softwares, aplicativos e plataformas com conteúdo dinâmico e online. Neste sentido, Amado et al. (2015, p. 640), afirmam que “o surgimento das novas tecnologias veio permitir uma nova abordagem da Matemática, que possibilita a realização de experiências, a formulação de conjecturas e a obtenção de novo conhecimento”. Mesmo com essas novas possibilidades de abordagem dos conteúdos de matemática, dificuldades de compreensão e de aquisição de conhecimentos de vários campos da matemática ainda são frequentes. Um exemplo disso, pode ser facilmente observado no ensino de geometria, principalmente quando

envolve a necessidade de realizar argumentações e demonstrações de propriedades geométricas. Balacheff (2010, p. 132) afirma que “os pesquisadores têm convergido em considerar a prova matemática como uma questão central no desafio de aprender e ensinar matemática; conhecimento matemático e demonstração não podem ser separados”, o que mostra a importância das demonstrações matemáticas na construção de conhecimentos desta área.

Atualmente, o uso de softwares computacionais que permitem a exploração de objetos matemáticos, principalmente aqueles voltados para o estudo da geometria, auxiliam tanto professores como estudantes nos processos de construção de objetos geométricos e verificação de suas propriedades. Conhecidos como Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), estes softwares, ou aplicativos para smartphones, são capazes de produzir figuras dinâmicas, permitindo tanto a manipulação e experimentação visuais quanto a argumentação baseada nas regularidades observadas, chegando a contribuir para a construção de demonstrações matemáticas formais. Segundo Gravina (2015, p. 243), “uma figura dinâmica é entendida como uma coleção de ‘desenhos em movimento’, que respeita um procedimento de construção”, sendo possível que a construção e a manipulação de uma figura geométrica dinâmica ajudem a dar significado e a mostrar ao estudante a necessidade de uma demonstração matemática. A autora enfatiza que, “com as figuras dinâmicas, as definições e os teoremas da geometria passam a ter componente figural com infinidade de representações” (Gravina, 2015, p. 244), que podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades para identificar propriedades matemáticas já conhecidas, além de melhorar as argumentações e o tratamento simbólico e em linguagem natural sobre estes objetos.

Atualmente, um dos AGD mais utilizados para a construção de figuras geométricas dinâmicas, com diversas possibilidades de auxílio na aprendizagem de conceitos geométricos através da experimentação e na produção de argumentação e de demonstrações de propriedades geométricas, é o GeoGebra. Este software tem apresentado predominância nas atividades de ensino e pesquisas “por propiciar atualização constante, acesso online gratuito, performance estável, estética agradável e diferentes possibilidades de uso (numérico, algébrico, geométrico e funcional)” (Bairral, Barreira, 2017, p. 47), além de ter uma interface em que os comandos e ferramentas de construção são descritos para o usuário de forma simples ao se passar o cursor sobre a ferramenta selecionada, o que facilita muito a sua utilização mesmo por alunos que não estão ambientados com o software.

Buscando descobrir qual o Estado de Conhecimento acerca do ensino de demonstrações geométricas auxiliados por AGD, optamos por realizar uma Revisão Sistemática de Literatura

(RSL) partindo de algumas palavras-chaves que retornassem um quantitativo de trabalhos expressivo na área e que permitissem refinamentos posteriores a partir dos títulos, resumos, palavras-chaves dos textos e conclusões. A descrição dos procedimentos metodológicos e análise quantitativa e qualitativa dos resultados encontrados nos permite realizar discussões fundamentadas sobre o tema, chegando a conclusões que podem ser exploradas em novas pesquisas e que podem auxiliar tanto pesquisadores como professores a desenvolver atividades que possibilitem os alunos a produzir conhecimentos satisfatórios na área da matemática em geral, mas, principalmente na compreensão da geometria como uma área baseada em demonstrações que estão em constante transformação e adaptações devido ao uso dos AGD.

O ESTADO DO CONHECIMENTO E REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

O Estado de Conhecimento é um componente crucial no desenvolvimento de pesquisas, fornecendo uma visão ampla e atualizada dos movimentos da investigação relacionada ao objeto de estudo proposto. É uma etapa fundamental que direciona os passos subsequentes dentro da pesquisa em questão. Essa análise abrange a exploração dos desenvolvimentos recentes sobre o tema, oferecendo uma perspectiva abrangente do interesse acadêmico e orientando de forma precisa as áreas a serem exploradas. Isso pode incluir a validação de descobertas anteriores, bem como a identificação de novas abordagens ou perspectivas a serem adotadas, ampliando, assim, as oportunidades de enriquecimento do estudo.

Com o intuito de obter um Estado de Conhecimento atual e fidedigno sobre o uso de AGD na produção de conhecimentos envolvendo demonstrações e propriedades geométricas, apoiamos-nos em uma RSL para produzirmos resultados consistentes e representativos. Segundo Okoli (2019, p. 4) uma RSL é “um método sistemático, explícito, (abrangente) e reproduzível para identificar, avaliar e sintetizar o corpo existente de trabalhos completos e registrados produzidos por pesquisadores, estudiosos e profissionais”. No que se refere à abordagem metodológica de uma RSL rigorosa, o autor fundamenta-a em três pilares indispensáveis; a RSL deve ser “*explícita* na explicação dos procedimentos pelos quais foi conduzida; *abrangente* em seu escopo ao incluir todo o material relevante; e, portanto, *reproduzível* por outros que desejem seguir a mesma abordagem na revisão do tema” (Okoli, 2019, p. 4).

Brizola e Fantin (2016, p. 30) esclarecem que “a RSL pode auxiliar o pesquisador a comparar os dados por ele coletados com o de pesquisas feitas anteriormente, já que indicam as recentes pesquisas que estão sendo feitas”. Outro ponto importante levantado pelos autores é que a RSL evita que o pesquisador caia em armadilhas acadêmicas ao pensar que está

desenvolvendo teorias nunca provadas ou exploradas e publicando material inédito, quando na verdade está buscando respostas a perguntas que já foram respondidas, ou seja, “a RSL pode impedir que o pesquisador cometa erros, que descubra, depois de uma longa e árdua pesquisa, que seu trabalho é irrelevante, que suas perguntas já foram respondidas, que nada daquilo que descobriu é novidade” (Brizola e Fantin, 2016, p. 30).

Para realizar uma RSL é fundamental efetuar uma revisão bibliográfica criteriosa, consultando uma variedade de fontes acadêmicas, como artigos científicos, dissertações e teses. A análise dessas fontes permite identificar as principais teorias, metodologias, resultados significativos encontrados e áreas ainda pouco exploradas dentro do tema em questão. Quanto a classificação de uma RSL, Galvão e Ricarte (2019, p. 60) afirmam que “muitos pesquisadores têm buscado mais intensamente a construção de revisão de literatura sistemática de caráter misto, ou seja, aquela que identifica, seleciona, avalia e sintetiza simultaneamente estudos qualitativos, estudos quantitativos e estudos mistos”. Já os autores Siddaway, Wood e Hedges (2019), apresentam outra classificação para uma RSL, que são basicamente três: revisões sistemáticas com meta-análise, voltada para a análise de pesquisas quantitativas, focando na análise estatística e de estimativas; revisões sistemáticas narrativas, onde o foco também é em buscar pesquisas quantitativas, mas sem focar tanto em dados estatísticos dos resultado; e revisões sistemáticas com meta-síntese, que são as RSL direcionadas para pesquisas qualitativas e que tem como objetivo principal “sintetizar estudos qualitativos sobre um tópico em a fim de localizar temas, conceitos ou teorias principais que fornecem explicações novas ou mais poderosas para o fenômeno em análise” (Thorne et al. 2004 apud Siddaway; Wood; Hedges, 2019, p. 756, tradução nossa).

Deste modo, inicialmente essa RSL poderia ser classificada como uma revisão de literatura de caráter misto, visto que, nas buscas em diferentes plataformas utilizando as palavras-chaves mais relevantes para encontrar produções acadêmicas sobre o tema alvo dessa pesquisa, não estávamos preocupados em selecionar resultados envolvendo ou só pesquisas qualitativas ou só pesquisas quantitativas, mas sim, pesquisas que envolvessem estudos sobre demonstrações geométricas e AGD. Mas optamos por tomar a classificação dada por Siddaway, Wood e Hedges (2019) para classificar esta RSL como sendo uma revisão sistemática com meta-síntese, já que a grande maioria dos textos analisados apresentam estudos qualitativos sobre o tema demonstrações e o uso de AGD.

OS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA E AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Segundo Notare e Basso (2018, p. 1), “a prova é uma característica essencial da Matemática. Ações como experimentar, formular conjecturas, testá-las e validá-las são processos naturais do fazer matemática”. Gravina (2001, p. 64) afirma que “uma dificuldade no processo de aprendizagem da geometria é o entendimento do sentido de demonstração, o perceber a diferença entre argumento de natureza empírica e argumento de natureza dedutiva”. Corroborando este pensamento, Fujita, Jones e Kunimune (2010, p. 11) enfatizam que “embora os alunos possam construir com sucesso uma prova simples em geometria, eles podem não saber necessariamente por que tal prova é necessária, e podem não distinguir entre verificação experimental e prova mais formal”. Independente da natureza do argumento, fazer os alunos perceberem regularidades em objetos geométricos e incentivá-los a descrever tais regularidades, pode contribuir para a transição da argumentação baseada na experimentação para uma argumentação mais próxima de uma demonstração matemática, baseada em processos dedutivos. Neste sentido, considerando o estudo de propriedades da geometria euclidiana, Notare e Basso (2018, p. 1) afirmam que “a argumentação tem papel fundamental para a compreensão e validação de teoremas, que caracterizam a essência axiomática-dedutiva desse campo da Matemática”, o que corrobora a afirmação de Balacheff (2022, p. 811), que considera que “as características da argumentação matemática não devem apenas distingui-la de outros tipos de argumentação, mas garantir a possibilidade de transição para a norma da demonstração”.

De acordo com Balacheff (2022, p. 812), “as provas são tanto a base quanto a organizadora dos conhecimentos. No decorrer do aprendizado, elas ajudam a consolidar sua evolução e a equipar sua organização”. Dada a importância que o entendimento das demonstrações das propriedades geométricas tem para a compreensão deste campo da matemática, concordamos com Notare e Basso (2018, p. 1) quando enfatizam que “pensar em alternativas para trabalhar com prova em sala de aula é uma questão fundamental no âmbito da Educação Matemática”. Deste modo, é importante tomar conhecimento das pesquisas que mostram as contribuições dos AGD na melhoria das argumentações e demonstrações geométricas produzidas pelos estudantes. Pesquisas como a de Leung, Baccaglioni-Frank e Mariotti (2013) mostram que AGD “fornecem um domínio epistêmico onde o movimento e a variação, juntamente com o feedback visual e sensorial, podem orientar a identificação de propriedades geométricas da figura” (p. 439). Leung (2008) defende que “um dos poderes dos

AGD é equipar-nos com a capacidade de reter o pano de fundo de uma configuração geométrica, enquanto podemos trazer seletivamente à tona, de forma dinâmica, aquelas partes de toda a configuração que nos interessam.” (p. 135). Dito de outro modo, o AGD permite ao usuário focar o estudo visual em alguns aspectos específicos de uma figura, enquanto outros aspectos podem ser mantidos sem alteração, “antecipando assim o surgimento de padrões invariantes” (Leung, 2008, p. 135).

Hanna e Knipping (2020) acreditam que o uso em sala de aula de softwares de matemática AGD deram um impulso à exploração matemática e tornaram muito mais fácil sugerir e testar conjecturas. As autoras afirmam que o uso de AGD, tais como softwares e calculadoras gráficas, “passaram a ter um efeito profundo no desenvolvimento das habilidades dos alunos, não apenas na exploração de figuras geométricas, mas também na modelagem, hipótese, validação e construção de provas” (Hanna, Kipping, 2020, p. 6, tradução nossa), o que indica que estes recursos têm um grande potencial para auxiliar os estudantes na aprendizagem a geometria e no desenvolvimento de demonstrações matemáticas em problemas geométricos.

Compartilham desta mesma visão e reforçam a importância dos AGD na produção de experimentações que podem evoluir para argumentações e demonstrações de propriedades geométricas, os autores Basso e Notare (2015, p. 5) ao afirmarem que o AGD “constitui-se como um espaço em que os alunos podem tornar possíveis suas ideias informais, para dar início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre determinado assunto”. Ao movimentar as figuras construídas com propriedades geométricas em um AGD, as regularidades que podem ser observadas podem causar inquietações nos estudantes, levando-os a questionar se existe alguma propriedade geométrica que garante tal regularidade. Além de um espaço de testagem, elaboração e validação de conjecturas, “atividades nesses ambientes provocam nos estudantes a necessidade de provar para comprovar o que está sendo observado e abstraído do processo de experimentação e descoberta” (Notare, Basso, 2018, p. 2).

Considerando a importância e os impactos que os trabalhos desenvolvidos sobre este tema podem representar no ensino de matemática, especialmente de geometria, é pertinente afirmar que buscar uma sistematização das pesquisas que relacionam AGD e demonstrações geométricas pode contribuir para mostrar aos pesquisadores da área qual o panorama atual a respeito desta temática, que certamente ainda pode evoluir muito e possibilitar melhorias significativas no processo de ensino e aprendizagem de geometria.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O propósito deste artigo consiste na identificação global das investigações publicadas referentes ao ensino de demonstrações geométricas por meio da utilização de AGD, com o intuito de analisar os métodos empregados para abordar esse conteúdo específico e examinar o emprego de AGD no contexto educacional. Diante disso foi identificado que a elaboração de uma RSL seria uma boa metodologia para mapear as práticas, estratégias pedagógicas e modalidades de utilização dos AGD disponíveis para o ensino e aprendizagem de demonstrações geométricas, fornecendo um panorama abrangente das abordagens adotadas internacionalmente.

O primeiro estágio do processo de elaboração dessa RSL implicou na delimitação dos objetivos fundamentais da revisão, a saber: 1) Identificar a afinidade e relevância em estudos publicados sobre o objeto desta investigação; 2) Realizar uma análise abrangente das pesquisas que têm sido conduzidas no contexto das demonstrações geométricas em conexão com os AGD, visando compreender e mapear o atual estágio do conhecimento neste domínio. A questão principal a responder foi: Qual é o panorama atual das pesquisas que abordam estudos que envolvem a aprendizagem de demonstrações geométricas associadas à utilização de ambientes de geometria dinâmica?

Elaboramos outras indagações mais específicas para orientar o levantamento de informações nos estudos, com o propósito de elucidar a questão principal: 1) Quais são os propósitos da pesquisa? 2) Quais bases teóricas embasaram o estudo? 3) Quais foram as opções metodológicas adotadas para alcançar os objetivos propostos? 4) Qual é a influência dos ambientes de geometria dinâmica nas investigações? 5) Quais foram os resultados principais obtidos?

Buscando conhecer o que já foi produzido sobre demonstrações geométricas associadas ao uso de ambiente de geometria dinâmica, iniciamos uma revisão sistemática nas principais plataformas científicas. As bases inicialmente escolhidas foram o Portal de periódicos da Capes, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), Scopus, Springer, Web of Science, Scielo, ACM Digital Library, IEEEExplore e a Science Direct. Começamos a pesquisa utilizando como descritores as expressões em português (“ensino” OR “aprendizagem”) AND (“demonstrações geométricas” OR “demonstrações em geometria”) AND (“geometria dinâmica”) e em inglês (“teaching” OR “learning”) AND (“geometric demonstrations” OR “geometric proof”) AND (“dynamic geometry”), obtendo poucos resultados. Com o intuito de abranger um maior campo

de pesquisa, optamos por incluir o termo GeoGebra, uma vez que é um dos AGD mais utilizados no mundo, e retirarmos os termos Ensino (Teaching) e Aprendizagem (Learning).

Dessa forma, a segunda busca realizada envolveu as expressões em português (“demonstrações geométricas” OR “demonstrações em geometria”) AND (geometria dinâmica OR GeoGebra) e em inglês ("geometric demonstrations" OR "geometric proof") AND (dynamic geometry OR GeoGebra). O procedimento adotado para a identificação dos estudos compreendeu os seguintes passos metodológicos: a) realização de uma leitura inicial dos títulos e/ou resumos, adotando uma abordagem fluente, na qual os resumos eram consultados somente quando a identificação do tema do estudo não se mostrava clara a partir do título; b) análise detalhada dos resumos completos dos estudos localizados, visando identificar explicitamente os objetivos e conclusões delineados.

Em situações específicas, foi imprescindível proceder à leitura integral do texto, devido à falta de clareza na definição dos objetivos e conclusões apenas com base nas informações contidas nos resumos. Os critérios de inclusão determinados no delineamento do estudo foram os seguintes: 1) idioma de publicação restrito aos idiomas português, inglês ou espanhol; 2) período de consideração restringido de 2018 a 2023, sendo as buscas realizadas pelos autores em janeiro de 2024; 3) estudos submetidos a revisão por pares; 4) estudos disponíveis em bases de dados indexadas. Em contrapartida, os critérios de exclusão adotados foram: 1) estudos direcionados a outras áreas do conhecimento; 2) resumos ou artigos com extensão limitada; 3) dificuldades de acesso aos estudos; 4) eliminação de estudos duplicados.

Além dos critérios previamente delineados, incorporamos à análise a avaliação da pertinência temática nos títulos, considerando tanto a indicação de demonstrações geométricas quanto a referência ao uso de AGD. Em outras palavras, os trabalhos eram selecionados se os títulos evidenciassem claramente a abordagem de demonstrações geométricas ou a utilização de AGD, mesmo que apenas um desses elementos estivesse explícito na descrição do título. Posteriormente à seleção baseada nesse critério, os resumos eram avaliados para determinar se o tema abordado incluía a exploração de demonstrações associadas diretamente aos AGD.

RESULTADOS ENCONTRADOS E ANÁLISE DOS TEXTOS RELEVANTES

Apresentamos no quadro a seguir os quantitativos encontrados em cada plataforma de busca utilizada na pesquisa, descrevendo o número de textos encontrados após os refinamentos descritos na metodologia. Os resultados obtidos na pesquisa, realizada e com filtro de busca até janeiro de 2024, estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Quantitativos de pesquisas encontradas e analisadas na RSL

Plataforma	Trabalhos Localizados	Trabalhos Selecionados pelo Título	Trabalhos identificados com a temática
Springer	48	19	3
Web of Science	1	1	1
Scielo	0	0	0
ACM	79	1	0
IEEEExplore	0	0	0
Science Direct	48	5	1
Scopus	289 (58) ⁴	0	0
Periódicos da Capes	379(241) ⁵	17	13
BDTD	7	4	3

Fonte: Elaboração dos Autores (2024)

Os trabalhos identificados com a temática da pesquisa foram assim determinados, em sua maioria, a partir da leitura dos resumos e das conclusões. Alguns textos foram analisados em sua integralidade, buscando evidências de que a pesquisa trazia relatos da conexão entre demonstrações geométricas e o uso de AGD. Elaboramos uma síntese de cada trabalho com o intuito de esclarecer a situação real das pesquisas envolvendo AGD e demonstrações geométricas no ensino de matemática. Começamos pelos artigos e finalizamos com as dissertações encontradas. Salientamos que não foram encontradas teses na pesquisa realizada na BDTD com as palavras-chaves padrão. Apresentamos a seguir as sínteses dos trabalhos científicos analisados, visando posteriormente realizar uma análise qualitativa dos resultados.

O artigo de Shabat e Semenov (2023) apresenta a importância do uso do recurso tecnológico na aprendizagem de provas algébricas e geométricas. No que se refere a provas geométricas, os autores defendem a ideia de que a prova apoiada em ambientes de geometria dinâmica exige menos tempo para a aprendizagem dos estudantes do que as realizadas de forma tradicional. Os autores indicam que a visualização possibilitada pelos AGD ajuda o aluno a identificar evidências que facilitam a ele produzir provas geométricas. Como exemplo da facilidade que estes ambientes propiciam, o autor descreve a construção de triângulos congruentes. No AGD é possível realizar construções a partir das regras de congruência, de

⁴ Dos 289 artigos que apareceram na busca utilizando as palavras-chaves citadas, apenas 58 eram da área da matemática, então, foi usado este filtro para descartar artigos de outras áreas como por exemplo, engenharia, ciência da computação, física e astronomia, entre outras. Usando como limitação as palavras-chave “demonstrações”, “geometria” e “aprendendo com demonstrações”, o resultado obtido foi 22 artigos, mesmo assim nenhum que estivesse alinhado com o assunto de demonstrações geométricas e geometria dinâmica.

⁵ Dos 379 resultados que surgiram na busca no Portal de Periódicos da Capes através das palavras utilizadas, 241 foram submetidos a revisão por pares. Ressalta-se também que, muitos títulos apareceram duplicados na pesquisa.

forma que a potencialidade dos AGD permite ao estudante observar evidências que facilitarão o processo de prova dos casos de congruências. Além disso, os autores apontam que o uso de AGD pode levar os alunos a formulação de teoremas.

No artigo de Komatsu e Jones (2020) é discutida a relação entre o uso de AGD e ambientes físicos no processo de conjectura e prova. Os autores destacam que os estudantes fazem uso de lápis e papel para fazer suas anotações durante a exploração de objetos geométricos nos AGD. Com relação ao uso de AGD, os autores comentam que uma declaração geométrica pode estar relacionada a múltiplas configurações, que às vezes não são representadas por uma única figura. Uma prova dedutiva baseada em uma figura genérica pode acabar sendo válida apenas dentro de um determinado caso, e que diferentes provas podem ser necessárias para diferentes configurações. A possibilidade do uso do modo de arrasto dos AGD possibilita uma real configuração genérica, uma vez que a figura pode ser manipulada sem perder as propriedades geométricas que a definem. O artigo apresenta um experimento em que os estudantes deviam provar uma sentença geométrica. Durante a resolução do problema, os alunos utilizaram o AGD para construir e explorar o objeto geométrico e perceber as possibilidades de generalização da figura. Foi devido ao AGD que os estudantes conseguiram visualizar diversas possibilidades de configuração da figura e realizar conjecturas envolvendo estas configurações. Porém foi no ambiente lápis e papel que eles conseguiram efetivamente realizar a prova destas conjecturas. O artigo traz relatos em que os estudantes discutiram entre si e, após estas discussões, conseguiram identificar as múltiplas possibilidades de configuração da figura. Apesar do artigo não abordar a importância da interação entre os estudantes na exploração do objeto geométrico, na formulação das conjecturas e na produção de provas, fica evidente que esta interação potencializou tais atividades. Por fim, os autores concluem os papéis complementares desempenhados pela atividade com papel e lápis e pelo uso do AGD.

O artigo de Komatsu e Jones (2019) propõe-se a desenvolver e testar empiricamente, com um trio de estudantes do ensino secundário e um par de estudantes de um curso de licenciatura em matemática, princípios de design de tarefas para apoiar a refutação heurística dos alunos (revisão de conjecturas/provas através da abordagem de contraexemplos) em AGD. Nessa pesquisa o termo refutação refere-se a duvidar da veracidade das conjecturas e da validade das provas. No artigo são apresentadas a descrição de uma construção geométrica geral e uma figura específica que representa tal descrição, e é solicitado que os estudantes avaliem uma determinada relação geométrica (como por exemplo a congruência de ângulos e triângulos). O objetivo é que os alunos produzam uma conjectura e uma prova. Porém a figura

apresentada condiciona os estudantes a conjecturar e provar um caso específico da descrição da construção geométrica. Solicita-se que eles realizem a construção em um AGD e verifiquem se é sempre válida suas conjecturas e provas, de maneira que eles consigam, após a manipulação no AGD, encontrar contraexemplos que refutam suas respostas (em especial a prova). As tarefas implementadas mostraram-se úteis para facilitar o processo de refutação heurística dos alunos. Como consequência da sequência de tarefas apresentadas, os estudantes conseguiram visualizar que a prova inicial apoiada na figura específica não era válida para casos gerais, de forma que os estudantes conseguiram então descrever uma nova prova que fosse verdadeira para todos os casos. Os autores destacam que, em pesquisas anteriores realizadas por um dos autores, muitos estudantes do ensino secundário encontraram dificuldades em desenhar figuras que refutassem provas em ambiente papel e lápis, mostrando a importância do uso de AGD nesse processo.

Na pesquisa de Ramirez-Uclés e Hidalgo (2022) são propostos problemas que envolvem um conjunto de atividades baseados na semelhança de triângulos, por meio de transformações geométricas, criados no GeoGebra e em ambiente lápis e papel. No artigo são categorizadas as respostas dos estudantes com base nos estilos de raciocínios, nas representações utilizadas e nos níveis de generalidade, coletadas por meio de um formulário do Google. O objetivo da pesquisa é identificar características de ensino que geram nos alunos uma necessidade de comprovação além do que o educador exige e avaliar a capacidade para fazê-los.

Os autores destacam que o uso dos AGD acomoda construções que podem ser alteradas dinamicamente arrastando objetos separados, proporcionando um enorme potencial para prova e visualização em problemas geométricos. Na pesquisa foram abordados cinco problemas em que o primeiro foi colocado usando representações pictóricas e algébricas; o segundo foi colocado apenas verbalmente; o terceiro e quarto foram complementados com construções manipuláveis no GeoGebra, e o quinto utilizou o GeoGebra para representar a classe de equivalência de triângulos. O resultado da pesquisa mostrou um maior nível de generalidade no raciocínio extraído de descrições visuais. Por fim, os autores concluíram que a abordagem de ensino que favorece a ligação entre argumentos visuais e expressões algébricas aumentaram a eficácia do raciocínio espacial dos alunos.

O artigo de Luz e Yerushalmy (2019) apresenta uma construção pronta em que o estudante pode apenas arrastar objetos em um applet. Não são disponibilizadas as opções de inserir elementos auxiliares (segmentos, pontos, etc) e nem realizar medições. As atividades consistem na apresentação de uma construção (por exemplo um triângulo isósceles ABC e um ponto D, interseção das bissetrizes dos ângulos da base do triângulo) em que os alunos precisam

arrastar pontos com o objetivo de validar a declaração fornecida, ou de configurar a construção de forma a obter um contraexemplo que refute a declaração, para após escrever sua conclusão em linguagem matemática. Neste trabalho o dinamismo do AGD serve apenas como forma de o aluno representar intuitivamente a sua interpretação da afirmação apresentada. Não foram abordadas demonstrações com rigor matemático no artigo, porém o trabalho mostra a importância do uso do AGD no processo de abstração de padrões nas figuras geométricas.

A pesquisa de Sánchez e Castillo (2022) traz tópicos relacionados à História da Matemática sobre as demonstrações do Teorema de Pitágoras, e realiza, com o auxílio do software GeoGebra, a construção da demonstração deste teorema realizada por Sócrates, que na verdade é uma demonstração geométrica visual de um caso particular do teorema, caso em que o triângulo retângulo é isósceles (catetos congruentes). O GeoGebra é utilizado pelos autores para a construção do triângulo retângulo acompanhado dos quadrados construídos sobre seus lados, e com o auxílio da ferramenta controle deslizante, realiza-se a movimentação por translações e rotações de figuras geométricas (triângulos) que compõem os quadrados sobre os catetos até encaixarem no quadrado sobre a hipotenusa, tratando-se de uma demonstração visual e sem apresentar uma demonstração matemática mais formal deste teorema, sendo assim pouco explorado as potencialidades do AGD na construção de demonstrações geométricas que não seriam possíveis sem o auxílio do software.

Com uma temática semelhante ao artigo descrito anteriormente, Silva, Nós e Sano (2023) apresentam algumas visualizações dinâmicas deste teorema usando o software GeoGebra. Os autores selecionaram algumas demonstrações dentre as 370 catalogadas por Elisha Scott Loomis em sua obra *The Pythagorean Proposition* para realização das experiências manipulativas utilizando o AGD, disponibilizando os links que dão acesso às construções das abordagens dinâmicas em páginas na plataforma GeoGebra, mas não realizaram uma testagem das atividades propostas com estudantes. Mesmo assim, os autores concluem que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para explorar dinamicamente o teorema de Pitágoras, possibilitando a realização tanto de demonstrações algébricas, geométricas e até mesmo vetoriais.

Na mesma linha de exploração do teorema de Pitágoras usando AGD está o artigo de Masot, Rodríguez e López (2021). Os autores exploram no texto três demonstrações clássicas deste teorema, começando pelo caso do triângulo retângulo isósceles já citado anteriormente, depois partindo para a demonstração dada por Euclides de Alexandria e finalizando com a demonstração realizada por Bhaskara. Além das manipulações e experimentações visuais exploradas nas construções realizadas no software GeoGebra, os autores apresentam também

as demonstrações algébricas juntamente com sugestões de procedimentos auxiliares para que os professores possam desenvolver as atividades em turmas do ensino secundário (ensino médio). Além destas três demonstrações, os autores realizaram outras 25 demonstrações do teorema de Pitágoras utilizando construções geométricas no software GeoGebra como auxílio à visualização, manipulação e aprendizagem do teorema e das respectivas provas matemáticas, e disponibilizaram o link que dá acesso a estas construções de forma online na página oficial do GeoGebra, quase que no formato de um livro de demonstrações. Os autores consideram que o uso de AGD é um recurso que, sendo usado de maneira correta pelo professor, pode favorecer o aprendizado dos estudantes devido ao caráter dinâmico das construções que permite a interação entre aluno, professor e conhecimento.

O artigo de Mathias, Silva e Leivas (2019) apresenta uma pesquisa teórica que traz exemplos de demonstrações visuais, que são chamadas de Provas Sem Palavras (PSP), e que se baseiam quase que exclusivamente no desenvolvimento das habilidades de visualização. Foram explorados efetivamente três problemas geométricos constantes de literatura específica, com o auxílio do software GeoGebra e algumas ferramentas que produzem movimentos no objeto, como translações, rotações e reflexões, que combinadas com os comandos “Sequências” e “Controle Deslizantes”, propiciam, segundo os autores, aspectos dinâmicos visuais fundamentais para o que se pode compreender como demonstração. Os autores concluem que estas ferramentas dos AGD fazem parte na fundamentação das PSP, e que contribuem para a melhor compreensão de teoremas fundamentais no ensino e aprendizagem de Geometria.

O artigo de Pavanelo e Almeida (2020) apresenta uma pesquisa realizada com professores de matemática de uma escola estadual, observando como os professores assimilam uma atividade relativa ao cálculo do número de diagonais de um prisma, através do uso de tecnologia digital. As autoras procuraram destacar a contribuição que o software GeoGebra ofereceu no processo de demonstração em geometria através das representações do objeto geométrico prisma, enfatizando que a riqueza de uma demonstração não reside somente na prova formal da tese, mas também no conhecimento desenvolvido nas tentativas que se faz na busca da demonstração. Por fim, as autoras identificaram que, no caso específico discutido, envolvendo as diagonais de um prisma, não ocorreu por parte dos participantes, a transposição das hipóteses vistas ou percebidas com o auxílio do software, para o mundo simbólico matemático, o que mostra que pesquisas sobre a abordagem de demonstrações matemáticas auxiliadas por AGD precisam ser realizadas e analisadas com mais clareza e profundidade.

O artigo de Nós e Lago (2020) apresenta uma investigação teórica de alguns teoremas geométricos abordados em cursos de geometria plana na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, utilizando o software GeoGebra para a construção de animações relevantes referente a estes teoremas de geometria. As animações geradas foram disponibilizadas no site oficial do GeoGebra e, ao final do estudo, pode-se concluir que as investigações com o GeoGebra aprimoram as concepções que antes eram desenvolvidas nas construções com régua e compasso e podem ser consideradas relevantes porque complementam e enriquecem as demonstrações formais dos teoremas analisados. Vale ressaltar que todas as construções geométricas apresentadas no estudo foram realizadas pelos autores do texto.

O artigo de Leivas e Bresolin (2022) apresenta uma pesquisa qualitativa realizada com estudantes de uma turma de primeiro ano do ensino médio, com o intuito de investigar o uso do software GeoGebra nas demonstrações visuais em Geometria Sintética, mais precisamente baseando-se na exploração de um teorema da geometria plana, onde os alunos puderam manipular a construção geométrica realizada no GeoGebra para investigar as características que a figura preservava após os movimentos e conjecturar o teorema proposto. Estas conjecturas e demonstrações não foram realizadas utilizando fórmulas matemáticas, e sim, apenas os aspectos visuais da geometria descritiva apoiada no uso de instrumentos geométricos, o que segundo os autores, é uma das características da Geometria Sintética. Por fim, os autores concluem que é possível explorar habilidades visuais no GeoGebra para obter demonstrações sintéticas de teoremas e propriedades em Geometria.

Ramírez, Osorio e Goycochea (2021) descrevem uma pesquisa realizada com estudantes de 15 a 18 anos da Universidade Autônoma de Querétaro, em que foi aplicada uma sequência de atividades que envolviam problemas de transformações isométricas. Os alunos puderam realizar manipulações e construções geométricas de ladrilhamentos semirregulares no software GeoGebra, com o intuito de verificar quais os esquemas de argumentação que os alunos utilizam para explicar as propriedades matemáticas existentes em cada construção. Os resultados da pesquisa mostraram que os alunos apresentam dificuldades em realizar uma argumentação usando conceitos matemáticos formais referentes às transformações isométricas, acabando por usarem uma linguagem informal devido ao pouco domínio tanto dos conceitos matemáticos quanto das ferramentas e aplicações possíveis no software GeoGebra. O foco dos autores na pesquisa envolvia a argumentação e não a análise de como os alunos produzem ou

assimilam demonstrações matemáticas, e mesmo com as dificuldades apresentadas, os autores concluem que o GeoGebra promove e favorece o processo de argumentação dos estudantes.

A mesma pesquisa citada anteriormente deu origem a um outro artigo publicado pelos mesmos autores em outro periódico, intitulado *Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica*, publicado também em 2021. A disciplina em que foram aplicadas as atividades da pesquisa é de Geometria Analítica, correspondente ao segundo ou terceiro ano do ensino médio do sistema educacional brasileiro. Os resultados apresentados no artigo são semelhantes ao que já foi exposto no artigo dos mesmos autores, e os autores concluem que o uso de representações geométricas construídas no AGD promove um avanço nas argumentações, mesmo que os alunos ainda apresentassem dificuldades em relacionar o raciocínio lógico dedutivo com a produção de argumentações analíticas. Um exemplo disso é dado quando os autores descrevem que mesmo os alunos percebendo que um ladrilhamento perfeito do plano acontece quando o vértice do ladrilho é de 360° , e que isso pode ser gerado com a composição de quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares, eles não conseguiram perceber que os polígonos regulares que permitem o ladrilhamento do plano têm a propriedade de ter ângulos internos de medida sendo um divisor de 360.

A pesquisa de Nóbriga (2019) traz um novo conceito de demonstrações matemáticas baseado e fundamentado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval. O autor define que as demonstrações matemáticas dinâmicas são um tipo de demonstrações realizadas em AGD, e que é necessária a criação deste conceito por considerar que as demonstrações dinâmicas têm características próprias que a diferenciam das demonstrações matemáticas convencionais, mesmo que ele não as considere como um novo tipo de prova, mas sim uma nova forma de apresentá-las. O autor faz adaptações em alguns conceitos da TRRS, tais como os conceitos de Conversão e Tratamentos, que são adaptados para Conversões Dinâmicas e Tratamentos Dinâmicos, respectivamente, e além da fundamentação teórica apresentada no texto, o autor apresenta alguns exemplos apoiado em construções realizadas nos AGD GeoGebra e Cabri-Géomètre. Por fim, conclui-se que as pesquisas iniciais nesta área indicam que o uso desse tipo de demonstração pode auxiliar a aprendizagem dos estudantes, desenvolvendo a autonomia no estudo de propriedades matemáticas e potencializando o poder argumentativo deles.

O artigo de Acosta-Gempeler e Fajardo (2021) traz o relato de uma pesquisa realizada a partir de atividades propostas aos estudantes que tinham por objetivo possibilitar a

experimentação em um AGD de modo que os mesmos conseguissem perceber e justificar quais as propriedades geométricas que surgiam na resolução do problema proposta. A ideia da pesquisa é mostrar que a convicção sobre o conhecimento geométrico pode ser construída através das experimentações realizadas com o AGD. No texto é realizada a análise das construções geométricas dos alunos e suas justificativas a respeito de duas atividades, sendo a primeira, envolvendo a construção de um arco capaz de ângulo de 90° , partindo da proposta inicial de, dados dois pontos A e B no plano, construir vinte pontos P de modo que o ângulo APB seja reto, e a segunda, sendo uma situação semelhante, dado os pontos A e B, construir vinte pontos P de modo que o segmento AP tenha mesma medida do segmento PB, que neste caso, envolve o conceito de mediatriz. O software utilizado pelos estudantes foi o GeoGebra, e ao final os autores concluem que as experimentações com o GeoGebra contribuem para que os estudantes construam convicções e justificativas para fatos geométricos que apresentam características evidentes, mesmo que não declaradas nas construções.

A pesquisa realizada por Flórez (2019) mostra um comparativo realizado com duas duplas de estudantes do curso de licenciatura em matemática, uma delas cursando o primeiro e a outra do quarto semestre do curso, ao realizarem atividades de argumentação e demonstração apoiadas em construções realizadas em um AGD, neste caso, o software GeoGebra. No estudo, percebeu-se que os problemas de demonstrações demandam conhecimentos e habilidades diferentes quando explorados com o auxílio de AGD. Os estudantes reconhecem que os AGD são uma ferramenta de validação e suporte das ações executadas e dos resultados obtidos, e percebeu-se, pela análise dos resultados das duplas, que o uso do AGD permitiu aos alunos do primeiro semestre, com carga menor de conhecimentos de geometria, obterem resultados melhores do que os estudantes com um conhecimento mais aprofundado das propriedades geométricas, mostrando assim o alto potencial que o uso de AGD apresenta quando utilizado na resolução de problemas envolvendo demonstrações matemáticas, contribuindo para a aprendizagem e desenvolvimento metacognitivo dos estudantes.

No artigo de Barbosa, Meneghetti e Poffal (2019) é proposta uma atividade envolvendo alguns conceitos iniciais de Geometria Espacial de Posição usando o software GeoGebra para a construção das figuras e imagens, com uma abordagem fundamentada na Investigação Matemática. Embora o texto faça uma explanação dos conceitos de Geometria Dinâmica e de Provas e demonstrações matemáticas, e tenha como um dos objetivos “evoluir a concepção de prova em matemática, partindo do empírico para o teórico”, percebe-se que as atividades propostas permitiram a manipulação do software GeoGebra por parte dos estudantes, mas a

investigação matemática foi direcionada apenas para que os alunos produzissem conjecturas e generalizações de conceitos da Geometria Espacial de Posição baseadas nas construções geométricas realizadas com o auxílio do software, não chegando a construir demonstrações formais a partir das construções realizadas no AGD. Por fim, os autores concluem que o GeoGebra ajudou os estudantes a superarem dificuldades de visualização dos objetos geométricos e permitiu aos estudantes, baseados nas suas próprias construções no software, refinar as conjecturas iniciais e estabelecer generalizações de propriedades geométricas no espaço.

A dissertação de Pereira (2022) apresenta uma abordagem dos conhecidos teoremas de geometria plana de Apolônio, Ptolomeu e Euler, onde algumas atividades preliminares de natureza investigativa são elaboradas no GeoGebra com o intuito de instigar os estudantes a elaborarem conjecturas geométricas relevantes antes da realização das demonstrações dos teoremas. O autor considera que a realização das construções geométricas no AGD faz parte de um trabalho necessário no caminho da investigação e da argumentação que os alunos podem construir, levando os estudantes ao entendimento das demonstrações dos teoremas de geometria plana propostos. As atividades propostas não foram efetivamente aplicadas com alunos, ficando de sugestão para que os professores e alunos usem o roteiro de atividades investigativas propostas. As construções no GeoGebra foram realizadas pelo autor da dissertação, servindo como auxílio visual para a construção das demonstrações dos teoremas de geometria discutidos no texto.

A dissertação de Biancatto (2021) traz a proposta de um material na forma de livro dinâmico destinado a professores e alunos do Ensino Superior transformando algumas demonstrações matemáticas de um livro físico de geometria plana e espacial em “demonstrações dinâmicas”, utilizando para isto o software GeoGebra. A dissertação apresenta propostas de atividades de demonstrações geométricas que podem ser exploradas em sala de aula com o auxílio do GeoGebra, mas não é realizada uma aplicação das atividades para verificar a eficácia do material digital. Um ponto importante deste trabalho é que após os enunciados das questões de geometria, a autora disponibilizou Qr-codes e links que direcionam o leitor para as construções e demonstrações dinâmicas. A autora explica o conceito de demonstração dinâmica baseada em alguns autores que começaram a usar este termo anteriormente, destacando que não deve ser considerada como uma estratégia nova de demonstração matemática, mas sim como a forma de apresentar uma demonstração ao público, o que no caso do trabalho usando o GeoGebra, refere-se ao dinamismo das construções

geométricas que podem ser manipuladas e movimentadas sem perder algumas características básicas pré-definidas, auxiliando a visualização de objetos geométricos e a generalização de propriedades matemáticas. As demonstrações exploradas no texto envolvem congruência de triângulos, semelhança de triângulos e Teorema de Tales, e todas as construções no software GeoGebra foram realizadas pela autora.

A dissertação de Silva (2022) apresenta algumas demonstrações matemáticas formais acompanhadas de visualizações dinâmicas de alguns teoremas de geometria plana, tais como os teoremas de Pitágoras, de Pascal e de Napoleão. A autora utiliza o GeoGebra para a produção das visualizações dinâmicas desses teoremas e para a construção de alguns lugares geométricos explorados ao longo do texto. Percebe-se novamente que as atividades propostas não foram aplicadas com estudantes e que as construções no software GeoGebra foram todas produzidas pela autora. Mesmo assim, a autora conclui que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para construir abordagens dinâmicas, e que isto possibilita investigações detalhadas de um teorema de geometria plana.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As descrições realizadas com base em cada texto encontrado nesta RSL e que se apresentou alinhado ao tema da pesquisa, expressam implicitamente uma análise qualitativa sobre as formas de abordagens das demonstrações geométricas apoiadas no uso de AGD que cada pesquisa apresenta. Visando complementar esta análise, apoiado em dados quantitativos, podemos inicialmente ressaltar que todas as 21 pesquisas listadas (18 artigos e 3 dissertações) utilizam como recurso tecnológico o software GeoGebra. Em apenas um artigo, o autor utiliza, além do GeoGebra, o AGD Cabri-Géomètre como alternativa para a realização das construções geométricas dinâmicas, mostrando a dominância e aceitabilidade do uso do software GeoGebra no ambiente escolar, tanto para a realização de construções geométricas dinâmicas para atividades focadas em desenvolver habilidades visuais, como para a exploração de demonstrações de propriedades geométricas.

Ressalta-se que apenas três das pesquisas encontradas na RSL apresentavam declaradamente o uso de uma teoria de aprendizagem que fundamenta as atividades propostas, sendo elas a Teoria da Imagem Conceitual, a Teoria do Estilo de Raciocínio e a TRRS. Outros três artigos trazem novos conceitos metodológicos envolvendo AGD e demonstrações matemáticas, que são os conceitos de Geometria Sintética, Provas Sem Palavras e Demonstrações geométricas dinâmicas, este último conceito sendo baseado na TRRS.

Outro aspecto interessante a ser considerado é que 11 artigos apresentaram a realização de atividades práticas de experimentação com estudantes ou professores, o que representa aproximadamente 52% de pesquisas aplicadas, contra 48% de pesquisas teóricas ou envolvendo sugestões de atividades para o uso em contexto escolar. Destas 11 pesquisas aplicadas, oito envolviam exclusivamente alunos da educação básica, uma envolvia alunos da educação básica e do ensino superior, uma foi aplicada somente a alunos do ensino superior e uma envolvia atividades propostas a professores de matemática da educação básica.

Pode-se perceber também, que nas pesquisas aplicadas, quatro delas utilizavam basicamente construções prontas no AGD, enquanto sete permitiam aos estudantes, além da manipulação da figura, a construção de novas figuras ou de novos elementos na construção geométrica solicitada. Mesmo assim, dentre estas últimas pesquisas, alguns autores concluíram que os alunos não conseguiram identificar propriedades geométricas gerais que podiam ser percebidas nas construções no AGD ou não desenvolveram habilidades suficientes a ponto de realizar em linguagem formal e matematicamente correta as demonstrações geométricas das propriedades existentes e exploradas nas figuras geométricas. A Tabela 2 a seguir, apresenta uma síntese quantitativa destes resultados.

Tabela 2: Análise quantitativa dos dados coletados na RSL

Categorias	Tipo de pesquisa	Especificidades da pesquisa	Nº	Total	%
Metodologia evidenciada na pesquisa	Aplicada	Alunos da Educação Básica	8	11	38,10
		Alunos da Educação Básica e do Ensino Superior	1		4,76
		Alunos do Ensino Superior	1		4,76
		Professores de matemática	1		4,76
	Teórica	Não aplicada com estudantes	10	10	47,62
Fundamentação teórica	Usa alguma teoria de aprendizagem	Sim	3	3	14,29
		Não	18	18	85,71
AGD utilizado	GeoGebra	Construções realizadas pelos alunos	7	21	33,33
		Construções prontas para manipulação	4		19,05
		Construções prontas, mas não aplicadas	10		47,62
	Cabri-Géomètre	Construções prontas, mas não aplicadas	1		4,76

Fonte: Elaboração dos Autores

CONCLUSÃO

Considerando os resultados obtidos na RSL realizada em plataformas de busca de produção científica de alcance e relevância mundial, buscando encontrar artigos e publicações acadêmicas dos últimos cinco anos (de 2018 até 2023) envolvendo o ensino de demonstrações geométricas apoiados no uso de AGD, pode-se constatar que as pesquisas a respeito deste tema ainda são de pouca expressão, principalmente no que se refere aos resultados embasados em coletas de dados empíricas, no qual a experimentação permita concluir que a atividade aplicada realmente apresentou resultados contundentes no ensino de geometria aos estudantes, servindo como catalisador para o uso por outros profissionais da área em suas respectivas atividades de ensino de matemática. Outro fator que merece destaque é que, embora uma das palavras-chaves usadas na busca e que servia de alternativa para o termo “geometria dinâmica” era a palavra “GeoGebra”, todos os resultados relevantes que retornaram da busca apresentavam o software GeoGebra como o AGD utilizado nas pesquisas, e somente um artigo apresentou um software alternativo ao GeoGebra. Isso mostra que as características da interface, a facilidade de manipulação devido às informações autoexplicativa dos ícones e ferramentas e as potencialidades algébricas e geométricas deste software, aliadas ao fácil acesso tanto para desktop, aparelhos mobile ou uso online, fazem com que o GeoGebra seja considerado um aparato tecnológico indispensável e que pode contribuir efetivamente para uma aprendizagem mais satisfatória por parte dos estudantes, principalmente nas áreas de geometria e álgebra.

Cientes de que o tema demonstrações geométricas auxiliados pelo uso de AGD vem sendo discutido há muito tempo no meio acadêmico e escolar, constatação respaldada pelos trabalhos de Gravina (2001, 2015), Leung (2008), Fujita, Jones e Kunimune (2010), Leung, Baccaglini-Frank e Mariotti (2013), Notare e Basso (2018), Hanna e Knipping (2020), buscamos identificar nas publicações mais recentes como as construções geométricas em AGD estão sendo usadas para melhorar a aprendizagem dos estudantes em geometria. Sendo assim, percebemos que algumas propostas de atividades em AGD exploram apenas as habilidades visuais dos estudantes, faltando nestas atividades aproveitar as potencialidades do software para que o estudante realize as suas construções e manipulações de figuras geométricas e trabalhe ativamente na validação das propriedades geométricas e construção das argumentações e demonstrações matemáticas, ou seja, construa seu próprio conhecimento.

Concluimos ainda que poucas pesquisas apresentam uma fundamentação metodológica adequada em suas propostas de atividades usando AGD para o ensino de demonstrações geométricas, tampouco apresentam alguma teoria de aprendizagem ou Tendência em Educação Matemática que sirva como base para a inserção do AGD no ambiente escolar e que apresente

de forma consistente como o uso destes softwares impactam no ensino e na aprendizagem de demonstrações geométricas nos diferentes níveis escolares. Deste modo, esperamos que este trabalho contribua para mostrar aos pesquisadores e professores de matemática que este tema merece discussões e pesquisas mais aprofundadas e que realmente apresentem resultados expressivos e contundentes na formação acadêmica dos estudantes da educação básica, do ensino superior e na formação continuada de professores de matemática em geral, em que seja possível mensurar os impactos no ensino e na aprendizagem dos estudantes a respeito dos conteúdos de geometria explorados nas pesquisas realizadas em sala de aula.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS pelo apoio à realização e publicação desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ACOSTA-GEMPELER, M. E.; FAJARDO, S. C. Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando software de geometría dinámica. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, n. 49, p. 255-276, 2021. Disponível em <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9884>.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do GeoGebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da Reta de Euler. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 637–657, 2015. Disponível em <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8842>.

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017.

BALACHEFF, N. Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In: Hanna, G. et al. **Explanation and Proof in Mathematics**, Springer, p. 115-135, 2010. Disponível em https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0576-5_9.

BALACHEFF, N. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 24, n. 1, p. 770-815, 2022. Disponível em <https://hal.science/hal-04015957>.

BARBOSA, L. de S.; MENEGHETTI, C. M. S.; POFFAL, C. A. O uso de geometria dinâmica e da investigação matemática na validação de propriedades geométricas. **Ciência e Natura**, v. 41, 2019. Disponível em <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/33752/e12?inline=1#bookmark54>.

BASSO, M. V. de A.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENTE**, v. 13, n. 2, 2015. Disponível em <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61432>.

BIANCATTO, V. B. **Livro dinâmico**: estudo de geometria plana através de demonstrações dinâmicas com o auxílio do software geogebra. 2021. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR, 2021. Disponível em <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/6335>.

BRIZOLA, J.; FANTIN, N. Revisão da literatura e revisão sistemática da literatura. **Revista de Educação do Vale do Arinos – RELVA**, v. 3, n. 2, 2016. Disponível em <https://periodicos.unemat.br/index.php/relva/article/view/1738>.

FLÓREZ, C. S. Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, n. 45, p. 121-142, 2019. Disponível em <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9838>.

FUJITA, T.; JONES, K.; KUNIMUNE, S. Students' geometrical constructions and proving activities: A case of cognitive unity? In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), **Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME34)** (Vol 3, pp 9-16). Belo Horizonte, Brazil: PME, 2010. Disponível em https://eprints.soton.ac.uk/445833/1/Fujita_etc_geom_constructions_unity_PME34_2010.pdf.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da informação**, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019. Disponível em <https://revista.ibict.br/fiinf/article/view/4835>.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. UFRGS, Porto Alegre/RS. 2001. Disponível em <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/2545/000321616.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015. Disponível em <https://periodicos.ufrn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/605/561>.

HANNA, G.; KNIPPING, C. Proof in mathematics education, 1980-2020: An overview. **Journal of Educational Research in Mathematics**, p. 1-13, 2020. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/344566063_Proof_in_Mathematics_Education_1980-2020_An_Overview

KOMATSU, K.; JONES, K. Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. 4, p. 801-824, 2019. Disponível em <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-018-9892-0>.

KOMATSU, K.; JONES, K. Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 6, n. 2, p. 123-143, 2020. Disponível em <https://link.springer.com/article/10.1007/s40751-020-00067-3>.

LEIVAS, J. C. P.; BRESOLIN, N. R. Q. Geometria Sintética: investigação por meio de demonstrações visuais. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, 2022. Disponível em <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/36468>.

LEUNG, A. Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 13, p. 135-157, 2008. Disponível em <https://link.springer.com/article/10.1007/s10758-008-9130-x>.

LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Discernment of invariants in dynamic geometry environments. **Educational Studies in Mathematics**, v. 84, p. 439-460, 2013. Disponível em <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-013-9492-4>.

LUZ, Y.; YERUSHALMY, M. Students' conceptions through the lens of a dynamic online geometry assessment platform. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 54, p. 100682, 2019. Disponível em <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312318300531>.

MASOT, M. C. B.; RODRÍGUEZ, V. Z.; LÓPEZ, M. B. Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. **Revista de Educación Matemática**, v. 36, n. 1, p. 27-42, 2021. Disponível em <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/32658>.

MATHIAS, C. V.; DA SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019. Disponível em <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/44701>.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e61725>.

NÓS, R. L.; LAGO, R. C. Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 15-29, 2020. Disponível em <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/47972>.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. de A. Argumentação e prova matemática com geometria dinâmica. **RENOTE: Revista novas tecnologias na educação**. Porto Alegre, v. 16, n. 1, 10 p., 2018. Disponível em <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86021>.

OKOLI, C. Guia para realizar uma revisão sistemática da literatura. **EaD em Foco**, 2019; v. 9, n. 1, p. 1-40, 2019. Disponível em <https://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/view/748>.

PAVANELO, E.; ALMEIDA, A. C. de P. L. Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma. **Actio: Docência em Ciências**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-21, 2020. Disponível em <https://revistas.utfpr.edu.br/actio/article/viewFile/11355/7586>.

PEREIRA, T. de L. M. Geometria dinâmica: um estudo de atividades investigativas e demonstrações em geometria plana. 2022. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora/MG, 2022. Disponível em https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/14108?locale=pt_BR.

RAMÍREZ-UCLÉS, R.; HIDALGO, J. F.R. Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. **Mathematics**, v. 10, n. 5, p. 789, 2022. Disponível em <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/5/789>.

RAMÍREZ, G. M.; OSORIO, V. L.; GOYCOCHEA, N. R. Esquemas de argumentación de estudiantes de bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados. **Uniciencia**, v. 35, n. 2, p. 253-270, 2021. Disponível em https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2215-34702021000200253.

RAMÍREZ, G. M.; GOYCOCHEA, N. R.; OSORIO, V. L. Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 664-689, 2021. Disponível em <https://www.scielo.br/j/bolema/a/GfZSBrhY5T5yQ67rsXfGn6h/>.

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História Da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. Disponível em <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8030>.

SHABAT, G. B.; SEMENOV, A. L. Computer experiment in teaching mathematics. In: **Doklady Mathematics**. Moscow: Pleiades Publishing, v. 107, n. 1, p. 92-116, 2023. Disponível em <https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562423700618>.

SIDDAWAY, A. P.; WOOD, A. M.; HEDGES, L. V. How to Do a Systematic Review: A Best Practice Guide for Conducting and Reporting Narrative Reviews, Meta-Analyses, and Meta-Syntheses. **Annual Review of Psychology**. v. 70, p. 747-770, 2019. Disponível em <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-psych-010418-102803>.

SILVA, V. M. R. da. Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra. 2022. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba/PR, 2022. Disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29513>.

SILVA, V. M. R. da; NÓS, R.; SANO, M. Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 62-77, 2023. Disponível em <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/59199>.

APÊNDICE – ARTIGOS E DISSERTAÇÕES

ARTIGOS

Título	Autores	Plataforma	Local de Publicação	País	Ano	Quais
--------	---------	------------	---------------------	------	-----	-------

Computer Experiment in Teaching Mathematics	G. B. Shabat e A. L. Semenov	Springer	Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya,	Rússia	2023	-
Interplay between Paper-and-Pencil Activity and Dynamic-Geometry-Environment Use during Generalisation and Proving	Kotaro Komatsu e Keith Jones	Springer	Digital Experiences in Mathematics Education	Suíça	2020	-
Task Design Principles for Heuristic Refutation in Dynamic Geometry Environments	Kotaro Komatsu e Keith Jones	Springer	International Journal of Science and Mathematics Education	Países Baixos (Holanda)	2018	A1
Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students	Rafael Ramírez-Uclés e Juan F. Ruiz-Hidalgo	Web of Science	Mathematics	Suíça	2022	-
Students' conceptions through the lens of a dynamic online geometry assessment platform	Yael Luz e Michal Yerushalmy	Science Direct	Journal of Mathematical Behavior	EUA	2019	-
Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica	Ivonne C. Sánchez S., Luis Andrés Castillo	Capes	Boletim Cearense de Educação e História da Matemática	Brasil	2022	B2
Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra	Victoria M. R. Silva, Rudimar L. Nós, Mari Sano	Capes	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	Brasil	2023	A3

Las demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras	María C. B. Masot, Víctor Z. Rodríguez, Manuel B. López	Capes	Revista de Educación Matemática	Argentina	2021	-
Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra	Carmen V. Mathias, Hilário A. Silva, José C. P. Leivas	Capes	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	Brasil	2019	A3
Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma	Elisangela Pavanelo e Ana Carla de Paula Leite Almeida	Capes	ACTIO: Docência em Ciências	Brasil	2020	A3
Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra	Rodrigo Cesar Lago e Rudimar Luiz Nós	Capes	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	Brasil	2020	A3
Geometria Sintética: investigação por meio de demonstrações visuais	Nadia R. Q. Bresolin, José C. P. Leivas	Capes	Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática	Brasil	2022	A4
Esquemas de argumentación de estudiantes de bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados	Guadalupe M. Ramírez, Víctor L. Osorio, Norma R. Goycochea	Capes	Revista Uniciencia	Colômbia	2021	-
O uso de geometria dinâmica e da investigação matemática na validação de propriedades geométricas	Lucas S. Barbosa, Cinthya M. S. Meneghetti, Cristiane A. Poffal	Capes	Ciência e Natura	Brasil	2019	A3
Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio	Guadalupe M. Ramírez, Víctor L. Osorio, Norma R. Goycochea	Capes	Bolema	Brasil	2021	A1

Demonstrações matemáticas dinâmicas	Jorge Cássio Costa Nóbriga	Capes	Revista Eletrônica de Educação Matemática	Brasil	2019	B1
Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando software de geometría dinámica	Martín E. A. Gempeler, Santiago C. Fajardo	Capes	Tecné, Episteme y Didaxis	Colômbia	2021	A2
Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica	Camilo Sua Flórez	Capes	Tecné, Episteme y Didaxis	Colômbia	2019	A2

DISSERTAÇÕES

Título	Autor	Universidade	Programa de Pós-Graduação	Ano
Geometria dinâmica: um estudo de atividades investigativas e demonstrações em geometria plana	Thales de Lélis Martins Pereira	Universidade Federal de Juiz de Fora	Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)	2022
Livro Dinâmico - estudo de geometria plana através de demonstrações dinâmicas com o auxílio do software GeoGebra	Viviane Bueno Biancatto	Universidade Estadual de Maringá	Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)	2021
Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra	Victoria Mazotti Rodrigues da Silva	Universidade Tecnológica Federal do Paraná	Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)	2022