BOLETIM GEPEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

Abstrações Reflexionantes no processo de arrasto em Geometria Dinâmica

Josias Neubert Savóis[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS campus Osório

Ricardo Silva Ribeiro[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS campus Restinga

Márcia Rodrigues Notare[3]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa realizada com alunos do 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *campus* Osório. Participaram da pesquisa os estudantes matriculados na disciplina de Geometria Espacial do referido curso. O objetivo da pesquisa foi verificar como a utilização do modo arrasto de um ambiente de geometria dinâmica poderia contribuir para a evolução do raciocínio geométrico através da transição das abstrações empíricas para abstrações reflexionantes, partindo de atividades de testagem e exploração até a construção de argumentação e demonstrações matemáticas. O ambiente de geometria dinâmica utilizado foi o software GeoGebra e a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget serviu de embasamento teórico para as análises das produções dos estudantes, permitindo identificar as formas de pensamento dos mesmos durante a atividade e os avanços cognitivos através das abstrações observadas. A principal atividade desenvolvida foi uma construção no GeoGebra no formato de caixa-preta, na qual pode-se observar que as manipulações dos estudantes partiram de explorações empíricas que aos poucos produziram reflexionamentos e reflexões que possibilitaram aos alunos além de compreender conceitos geométricos envolvidos na construção, também elaborar uma argumentação coerente a respeito das propriedades matemáticas observadas.

Palavras-chave: Abstração Reflexionante; Arrasto; Geometria Dinâmica; GeoGebra.

Reflective Abstractions in the dragging process in Dynamic Geometry

ABSTRACT

This work presents the results of a qualitative research carried out with students in the 3rd semester of the Mathematics Degree course of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Sul

[1]Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande (FURG). Professor de matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Osório, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Joaquim Nunes, 414, centro, Três Forquilhas. RS, Brasil, CEP: 95575-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4332-8263 E-mail: josias.savois@osorio.ifrs.edu.com.br.

[2]Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor de matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Restinga, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Presidente João Goulart, 85, Centenário, Torres, RS, Brasil, CEP: 95560-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0614-8826. E-mail: ricardo.ribeiro@restinga.ifrs.edu.com.br.

[3]Doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora de matemática na Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Paulo Gama, 110, anexo II, Farroupilha, Porto Alegre, Brasil, CEP: 90040-060. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2897-8348. E-mail: marcia.notare@gmail.com.

– Osório campus. Students enrolled in the Spatial Geometry discipline of that course participated in the research. The objective of the research was to verify how the use of drag mode in a dynamic geometry environment could contribute to the evolution of geometric reasoning through the transition from empirical abstractions to reflective abstractions, starting from testing and exploration activities to the construction of arguments and demonstrations. mathematics. The dynamic geometry environment used was the GeoGebra software and Piaget's theory of cognitive development served as a theoretical basis for analyzing the students' productions, allowing the identification of their ways of thinking during the activity and cognitive advances through the abstractions observed. The main activity developed was a construction in GeoGebra in the black box format, in which it can be observed that the students' manipulations came from empirical explorations that gradually produced reflections and reflections that enabled students to understand geometric concepts involved in the construction, also develop a coherent argument regarding the observed mathematical properties.
Keywords: Reflective Abstraction; Drag; Dynamic Geometry; GeoGebra.

Abstracciones Reflectantes en el proceso de arrastre en Geometría Dinámica

RESUMEN

Este trabajo presenta los resultados de una investigación cualitativa realizada con estudiantes del 3er semestre de la Licenciatura en Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Río Grande del Sur - campus Osório. En la investigación participaron estudiantes matriculados en la disciplina Geometría Espacial de ese curso. El objetivo de la investigación fue verificar cómo el uso del modo arrastre en un ambiente de geometría dinámica podría contribuir a la evolución del razonamiento geométrico a través de la transición de abstracciones empíricas a abstracciones reflexivas, a partir de actividades de prueba y exploración hasta la construcción de argumentos y demostraciones matemáticas. El entorno de geometría dinámica utilizado fue el software GeoGebra y la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget sirvió como base teórica para analizar las producciones de los estudiantes, permitiendo identificar sus formas de pensar durante la actividad y avances cognitivos a través de las abstracciones observadas. La principal actividad desarrollada fue una construcción en GeoGebra en el formato de caja negra, en la cual se puede observar que las manipulaciones de los estudiantes surgieron de exploraciones empíricas que gradualmente produjeron reflexiones y reflexiones que permitieron a los estudiantes comprender conceptos geométricos involucrados en la construcción, además desarrollaron un argumento coherente sobre las propiedades matemáticas observadas.
Palabras clave: Abstracción Reflexiva; Arrastrar; Geometría Dinámica; GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Segundo Gravina e Contiero (2011, p. 2), “o estudo da geometria escolar tem foco na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, sem que haja maiores preocupações com o desenvolvimento do raciocínio geométrico”, o que acaba gerando uma defasagem gigantesca na aprendizagem, fazendo com que os alunos ingressem na graduação desprovidos de algumas habilidades ou capacidades que seriam necessárias para a construção do conhecimento geométrico, tais como as habilidades de abstrair, generalizar, estabelecer relações e fazer conjeturas (Gravina, 2001; Gravina; Contiero, 2011). Contudo, estas lacunas no ensino de geometria não são observadas apenas na educação básica ou nos alunos ingressantes no ensino superior, e não devem ser consideradas uma exclusividade da educação matemática brasileira. Uma pesquisa realizada por Ordem (2015), envolvendo estudantes de último ano de graduação de um curso de Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique, mostrou que a maioria dos alunos não dominavam conceitos básicos de geometria, como o uso das propriedades de uma mediatriz para estruturar uma demonstração em um triângulo isósceles, ou mesmo não conseguiam elaborar demonstrações para validar teoremas de geometria, recorrendo a dobraduras ou o uso de softwares como fontes confiáveis e aceitas como sendo uma demonstração matemática (Ordem, 2015, p. 304-5).

Diante disso, faz-se necessário pensar em estratégias de ensino que possam contribuir para a aprendizagem tanto de conceitos quanto das demonstrações de propriedades que envolvem objetos geométricos. Então, para compreender as possíveis contribuições de ambientes de geometria dinâmica (AGD) para a aprendizagem de geometria, desenvolvemos algumas atividades envolvendo conceitos e teoremas de geometria plana que foram aplicadas com alunos do 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *campus* Osório (IFRS – *campus* Osório), com o intuito de verificar como a utilização do modo arrasto do software GeoGebra[4] contribui para a evolução do raciocínio geométrico através da transição das abstrações empíricas para abstrações reflexionantes, segundo a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget. O uso do AGD GeoGebra também serviu para incentivar os alunos a criarem conjecturas através de explorações e testagens nas figuras geométricas, levando-os a abstrair e generalizar as propriedades geométricas observadas na construção no GeoGebra., culminando em um novo patamar de raciocínio, mesmo que se tenha observado as dificuldades que os alunos apresentam para produzir as demonstrações matemáticas formais das propriedades encontradas.

A EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE JEAN PIAGET

A álgebra e a aritmética ocupam um lugar de destaque no ensino de matemática em detrimento dos conteúdos de geometria. Mesmo na Educação Infantil, percebe-se essa priorização, isso porque “o ensino da matemática continua reduzido às noções numéricas” (Souza, 2007, p. 8), o que acaba tornando comum encontrarmos estudantes de todos os níveis escolares com dificuldades nos conteúdos que envolvem a geometria básica. Gravina (2001, p. 3) afirma que para superar essas “dificuldades de aprendizagem, dois contextos exigem atenção: o do indivíduo e o do meio”, em que deve-se focar e prestar atenção nas construções cognitivas de cada sujeito, sem esquecer da importância das “intermediações que sintonizam as construções individuais com o saber matemático a ser aprendido – o sujeito interagindo com o meio, quer social, quer tecnológico” (Gravina, 2001, p. 3). A autora enfatiza ainda que “na

[4] Software de Geometria Dinâmica onde é possível fazer construções do tipo régua e compasso.

transição do conhecimento empírico para o conhecimento que tem caráter de teoria matemática, mostra-se necessária uma crucial reestruturação de forma de pensar” (Gravina, 2001, p. 5), sendo que os recursos das Tecnologias Digitais (TD) podem muito bem servir como ferramentas intermediadoras no desenvolvimento dessas habilidades cognitivas do sujeito em relação à argumentação matemática, à aprendizagem de geometria e ao aprimoramento do raciocínio geométrico. Considerando os AGD como sendo essa ferramenta tecnológica no ensino de matemática, corroboram essa perspectiva Barbosa, Meneghetti e Poffal (2019, p. 7) ao afirmarem que “a prática de uso de softwares de Geometria Dinâmica favorece a evolução cognitiva da relação entre percepção e abstração”.

Essa reestruturação na forma de pensar e a evolução cognitiva que os autores supracitados colocam, inevitavelmente passa pela função do professor, que tem o desafio de mitigar esse déficit e procurar promover espaços que favoreçam o aprendizado dos conteúdos de geometria. Para tanto, é preciso que o professor compreenda a forma como o sujeito aprende, de modo a estabelecer estratégias que auxiliem o estudante na aquisição de conhecimentos geométricos. De acordo com Piaget (1975, p. 53), aprendizagem é “uma aquisição em função da experiência, mas se desenvolvendo no tempo, quer dizer mediata e não imediata como a percepção ou a compreensão instantânea”.

Neste sentido, Piaget e Gréco (1974) distinguem em dois sentidos o processo de aprendizagem: o restrito e o amplo. No sentido restrito (*stricto sensu*), “só falaríamos de aprendizagem na medida em que um resultado (conhecimento ou atuação) é adquirido em função da experiência, essa experiência podendo aliás ser do tipo físico ou do tipo lógico-matemático ou dos dois” (Piaget, Gréco, 1974, p. 52), ou seja, quando em função da sua experiência o sujeito obtém êxito em determinada ação. Por outro lado, Piaget e Gréco (1974) definem como aprendizagem no sentido amplo (*lato sensu*) a união da aprendizagem *stricto sensu* com as aquisições devidas aos processos de equilibração. Trata-se das ações que levam o sujeito a saber fazer e compreender o que faz. Resumidamente, podemos estabelecer que, em função da experiência, a aprendizagem *stricto senso* é saber fazer algo, e a aprendizagem *lato sensu* é saber fazer algo e compreender como foi feito.

Para ilustrar estes dois processos de aprendizagem, podemos citar a situação em que o estudante realiza uma atividade em aula, como por exemplo realizar a construção de um quadrado com o auxílio do software GeoGebra, reproduzindo os passos de construção indicados pelo professor. Pode ser que o aluno não tenha compreendido o motivo da construção resultar em um quadrado e nem as propriedades geradas na construção, porém ele é capaz de construir tal figura geométrica, o que caracteriza uma aprendizagem no sentido restrito. Caso ele compreenda as propriedades que fazem os passos de construção funcionar e gerar um quadrado, e se apoiar nesta experiência para construir outros objetos geométricos utilizando procedimentos semelhantes com propriedades que garantam a construção, como construir um triângulo equilátero ou um hexágono regular, estaríamos falando de uma aprendizagem no sentido amplo, Surge então a questão: como o indivíduo sai de um conhecimento mais simples para conhecimentos mais complexos?

Segundo Becker (2012, p. 112), conhecer é transformar o objeto e transformar a si mesmo. Uma bola, uma equação de matemática, uma pessoa, um livro, a elaboração de um texto, um problema político, ou seja, qualquer coisa que não seja o próprio sujeito tratamos como objeto de conhecimento. O sujeito adapta-se ao objeto em função das relações que ele estabelece com este objeto, diferenciando a forma como age. É da interação entre o sujeito e objeto que ocorre a modificação das estruturas cognitivas desse sujeito, a partir de dois processos complementares, a assimilação e acomodação.

> O sujeito age sobre o objeto, assimilando-o: essa ação assimiladora transforma o objeto. O objeto, ao ser assimilado, resiste aos instrumentos de assimilação de que o sujeito dispõe no momento. Por isso, o sujeito reage refazendo esses instrumentos ou construindo novos instrumentos, mais poderosos, com os quais se torna capaz de assimilar, isto é, de transformar objetos cada vez mais complexos. Essas transformações dos instrumentos de assimilação constituem a ação acomodadora (Becker, 2012, p. 112).

A assimilação é condição necessária para que haja desenvolvimento. O sujeito assimila aquilo que seus esquemas assimiladores são capazes de apropriar-se, esquemas estes que são frutos das interações que este sujeito estabeleceu em suas experiências anteriores. As propriedades assimiladas dos objetos são incorporadas aos esquemas existentes do sujeito, que em função dessas propriedades se reorganizam e se transformam (acomodação), reestruturando a organização cognitiva. Trata-se de "um processo (de onde o termo 'equilibração') que conduz de certos estados de equilíbrio aproximado a outros, qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações" (Piaget, 1976, p. 11).

Becker (2012, p. 33) explica que, se "no plano do desenvolvimento não forem construídas estruturas capazes de assimilações de conteúdos, progressivamente complexos, a aprendizagem estagna; não consegue avançar". Parece claro para nós que, para haver uma aprendizagem significativa, é preciso que o professor promova espaços em que o aluno interaja com os objetos de conhecimento, de forma que parta do que ele sabe, do que é capaz de assimilar, para o que se quer aprender. Ao assimilar algo novo, as estruturas cognitivas do estudante se desequilibram, e na busca da reequilibração elas se acomodam. É um processo contínuo, de desequilíbrios e reequilibrações, de assimilações e acomodações.

Mas será que sempre que ocorre esse processo há uma modificação qualitativa na forma como o sujeito compreende o objeto? Piaget (1975) em sua obra *Abstração reflexionante: Relações Lógico-Aritméticas e ordem das Relações* apresenta a teoria da abstração. Segundo Becker (2014, p. 105), "abstração é a atividade ao mesmo tempo coordenadora e diferenciadora do sujeito conhecedor mediante a qual constrói conhecimento, como estrutura ou capacidade; secundariamente, como conteúdo". Piaget (1995) distingue dois tipos de abstração, a empírica e a reflexionante. Na abstração empírica o sujeito retira informações das características observáveis dos objetos, ou das ações que o sujeito realiza com os aspectos materiais do objeto por meio dos seus sentidos. A abstração reflexionante "apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas." (Piaget, 1995, p. 274). Quando o objeto é modificado e enriquecido por propriedades tiradas das coordenações do sujeito, chamamos esta abstração reflexionante apoiada nessas propriedades de pseudo-empírica, e quando a abstração reflexionante torna-se consciente, denominamos de abstração refletida.

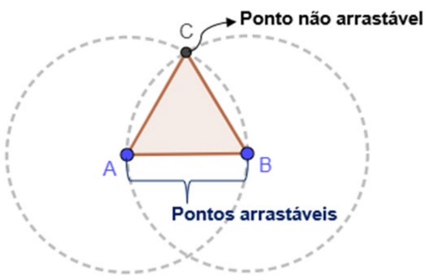
A abstração reflexionante ocorre a partir de dois processos complementares e indissociáveis: o reflexionamento e a reflexão. O reflexionamento é a retirada de conteúdos de um patamar inferior e projetado para um patamar superior, e a reflexão é a reconstrução e reorganização do patamar superior em função daquilo que foi retirado do inferior. São as abstrações reflexionantes que explicam a formação das novidades e das generalizações, que possibilitam um salto nas estruturas cognitivas do sujeito, modificando qualitativamente a forma como ele interage com os objetos. Na abstração reflexionante há uma mudança de nível nas estruturas, uma vez que há uma reorganização num patamar superior daquilo que foi projetado do inferior. Portanto, os processos de equilibração e abstração reflexionante estão intimamente ligados, visto que a abstração reflexionante é possibilitada por uma série de equilibrações das estruturas cognitivas. Nem todo processo de equilibração resulta em uma abstração reflexionante, porém toda abstração reflexionante necessita de instrumentos assimiladores, construídos pelo sujeito a partir das suas experiências.

O MODO ARRASTO

Barbosa, Meneghetti e Poffal (2019, p. 7) afirmam que, além de explicitarem propriedades matemáticas que antes poderiam permanecer ocultas pela estaticidade do desenho, “a Geometria Dinâmica também possibilita a produção de conjecturas, fase essencial da Investigação Matemática. Também permite testá-las, refiná-las ou mesmo refutá-las”. O modo arrasto, uma das principais ferramentas disponíveis em um AGD, foi projetado para superar a inércia da geometria representada pela utilização de recursos físicos como lápis, régua e compasso. A possibilidade de mover certas partes de uma figura sem mudar suas relações geométricas amplia as oportunidades de exploração, investigação e resolução de problemas geométricos. Considerando os processos cognitivos envolvidos em uma validação de propriedades, o AGD “permite exploração na sua fase mais empírica, ao mesmo tempo em que pode servir de motivação para a introdução da necessidade de argumentos matemáticos” (Barbosa; Meneghetti; Poffal, 2019, p. 7).

A geometria construída nesses ambientes dinâmicos altera as relações existentes entre os elementos que compõem uma figura. O aspecto relacional existente entre os objetos geométricos definidos pelos passos de construção da figura adquire outro caráter na geometria dinâmica. A generalização existente na geometria euclidiana ao definir um objeto, ganha contornos singulares nesses ambientes. Segundo Hölzl (1996), o modo arrasto altera o caráter relacional dos objetos geométricos. O autor cita, como exemplo, a construção de um triângulo equilátero ABC em que os pontos A e B são dados. Na geometria euclidiana, ao definir C a partir de A e B, não haveria razão em distinguir os três pontos, uma vez que eles definem o mesmo triângulo. Porém, em uma construção realizada em AGD a situação seria diferente, já que os pontos A e B poderiam ser arrastados enquanto o ponto C não (Figura 1). No AGD o programa não permite que se arraste pontos resultantes da interseção de outros objetos geométricos.

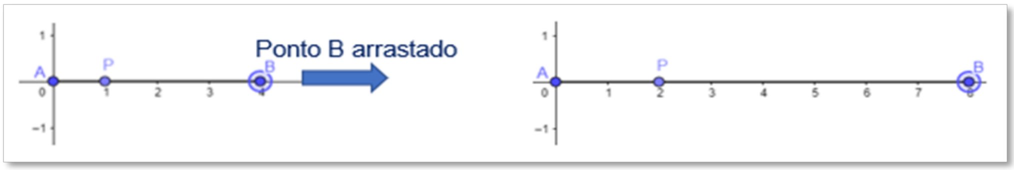
Figura 1 – Pontos arrastáveis e não arrastáveis



Fonte: Elaboração pelos autores

Os passos de construção da figura em um AGD determinam qual o grau de liberdade de cada um dos seus elementos. Objetos construídos sem qualquer restrição podem ser arrastados livremente no plano. Por outro lado, objetos definidos a partir de suas propriedades geométricas terão sua movimentação limitada. Outra característica do modo arrastar presente no AGD é o comportamento da figura quando movimentamos seus pontos. Hölzl (1996) cita como exemplo o comportamento de "pontos em objetos". Ao inserir um ponto P em um segmento AB, e arrastarmos o ponto A ou B, haveria duas possibilidades para P: mudar sua posição original ou não. O autor destaca que no AGD ocorre a movimentação do ponto P, de forma a manter as proporções originais. Assim, ao arrastar os pontos livres A e B, P ainda dividiria o segmento na mesma proporção inicial, dando a ideia de dilatação da imagem (Figura 2).

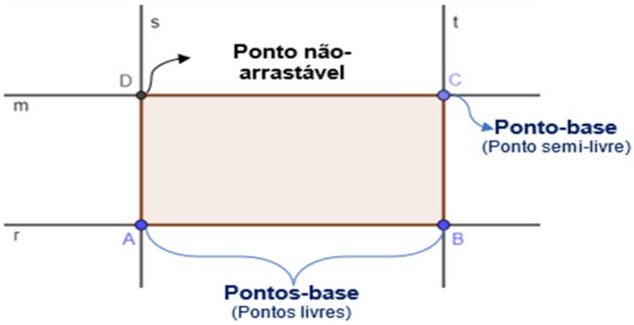
Figura 2 – Comportamento no GeoGebra ao movimentar pontos livres



Fonte: Elaboração pelos autores

No AGD a movimentação de objetos livres leva a uma reconstrução instantânea da figura em função do objeto movimentando, dando a ideia de "figura em movimento". A movimentação dos objetos pode ser realizada de forma direta ou indireta. Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) definem como elemento base (normalmente um ponto), um objeto geométrico passível de ser movimentado selecionando-o diretamente. Um ponto base, por exemplo, é "um ponto livre (ou um ponto semi-livre, se estiver ligado a um objeto) que, portanto, pode ser arrastado para qualquer lugar da tela (ou ao longo do objeto ao qual está vinculado)" (Baccaglini-Frank; Mariotti, 2010, p. 228), representando o que as autoras chamam de movimento direto. Por outro lado, o movimento indireto de um elemento ocorre quando este elemento parece se mover na tela de uma maneira que depende do movimento de um ponto base selecionado (ou objeto) que está sendo arrastado. Dessa forma, o uso do modo arrasto possibilita ao usuário a percepção da "dependência de movimento", que pode ser interpretada como uma relação de dependência lógica dentro do contexto da geometria euclidiana (Mariotti, 2006).

Figura 3 – Movimentação direta e indireta no GeoGebra



Fonte: Elaboração pelos autores

Essa “dependência de movimento” que o modo arrastar traz à tona na geometria dinâmica possibilita ao aluno uma outra forma de explorar construções geométricas e as relações entre elementos geométricos que compõem uma figura. Dessa forma,

> a geometria dinâmica não deve ser tratada como se fosse apenas uma nova interface para a construção euclidiana. Segmentos de reta que se estendem e pontos que se movem em relação uns aos outros não são trivialmente os mesmos objetos que se trata na geometria sintética familiar, e isso sugere novos estilos de raciocínio (Goldenberg 1995, p. 220).

Essa geometria em movimento, possibilitada pelos AGD, proporciona uma outra relação do sujeito com a geometria. O modo arrasto exige que os sujeitos explorem as figuras geométricas de modos distintos, a partir de pressupostos diferentes dos quais eles teriam no ambiente lápis e papel.

As modalidades de arrasto

O uso do modo arrastar tem sido objeto de pesquisa de diversos autores (Arzarello *et al*., 1998; Arzarello, 2001; Arzarello *et al*., 2002; Baccaglini-Frank, 2012; Baccaglini-Frank; Mariotti, 2010; Leung, 2008; Leung; Baccaglini-Frank; Mariotti, 2013; Olivero, 1999; Olivero, 2002). Nestas pesquisas, os autores procuram compreender de que forma o modo arrastar pode ajudar os alunos a desenvolverem o pensamento geométrico, por meio da formulação de conjecturas, da construção de argumentos lógico-dedutivos e até mesmo da prova de propriedades geométricas. As estratégias de uso do arrastamento são um dos principais focos de estudo dessas pesquisas. Elas indicam a existência de uma estrutura hierárquica no uso do modo arrastar, de maneira que a forma como o usuário movimenta os pontos-base são determinadas pelos objetivos alçados por eles. Assim, os papéis que o modo arrasto pode desempenhar são estabelecidos de acordo com as estratégias que o aluno utiliza para resolver um determinado problema geométrico.

Ao explorar um problema geométrico em um AGD, o usuário utiliza o modo arrastar para identificar propriedades e regularidades geométricas a fim de resolver o problema proposto. Na tentativa de identificar estas propriedades invariantes, o sujeito explora a construção geométrica manipulando os objetos passíveis de movimentação. Essa manipulação, quando bem orientada, é direcionada pelas descobertas que o usuário realiza a partir das estratégias de arrasto que ele elege.

Arzarello *et al*. (1998) foram os primeiros a identificarem e classificarem o modo de utilização do recurso arrastar do AGD, descrevendo sete modalidades de arrasto: aleatório, guiado, limite, *locus* fictício, curva, vinculado e teste. Baseadas nos estudos apresentados por Arzarello, as pesquisadoras Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) apresentaram quatro modalidades de arrasto, estruturadas hierarquicamente, a saber: arrasto aleatório, mantendo arrasto, arrastando com traço ativado e teste de arrasto. Por sua vez, Leung (2008) reinterpreta as modalidades de arrasto de Arzarello a partir de uma lente de variação. Nesse estudo, as funções de variação (contraste, separação, generalização e fusão) apresentadas por Marton, Runesson e Tsui (2004) são utilizadas como uma lente para organizar e interpretar explorações de arrasto. Descreveremos no tópico seguinte as modalidades de arrasto apresentadas por Arzarello e seus colegas.

As modalidades de arrasto de Arzarello

As pesquisas de Arzarello *et al*. (1998) e Olivero (1999) produziram uma classificação dos tipos de arrasto em AGD, utilizando para tal classificação, um modelo teórico que se baseia nas definições de controle ascendente e controle descendente de Gallo (1994) e no conceito de abdução de Peirce (1960). No controle ascendente, o fluxo do pensamento vai da figura à teoria, ou seja, o sujeito analisa a figura com o intuito de elaborar conjecturas. Nesta modalidade, segundo o autor, o sujeito explora e encontra aspectos da teoria relacionados à situação com a qual ele é confrontado. Já no controle descendente, o fluxo do pensamento vai da teoria à figura, ou seja, ocorre quando o sujeito já elaborou uma conjectura e busca sua validação a partir da manipulação da figura. A abdução significa procurar uma regra que se encaixe na situação proposta ("qual regra é o caso?"), ou seja, o sujeito busca em seus conhecimentos prévios qual conceito teórico que se adequa à situação apresentada. A exploração transforma-se em conjecturas. Deste modo, ao observar como os alunos usavam o mouse enquanto manipulavam uma construção no AGD, os autores (Arzarello *et al*., 1998; Arzarello, 2001; Arzarello *et al*., 2002; Olivero, 1999; Olivero, 2002) determinaram as diferentes modalidades de arrasto:

Arrasto aleatório (*Wandering dragging*): quando o sujeito movimenta os pontos-base aleatoriamente na tela, sem um planejamento prévio, com o objetivo de descobrir configurações ou regularidades interessantes da construção geométrica.

Arrasto limite (*Bound dragging*): quando o sujeito movimenta um ponto-base semi-livre, arrastando-o sobre o objeto que está ligado.

Arrasto guiado (*Guided dragging*): quando o sujeito movimenta um ponto-base de uma figura com o objetivo de dar-lhe uma forma geométrica particular.

Arrastando no *locus* fictício (*Dummy locus dragging*): quando o sujeito movimenta um ponto-base para que a figura mantenha uma propriedade descoberta, determinando um lugar geométrico, mesmo sem estar ciente disso.

Arrastar curva (*Line dragging*)*:* quando o sujeito constrói novos pontos ao longo de um lugar geométrico, a fim de manter a regularidade da figura.

Arrastar vinculado (*Linked dragging*): quando o sujeito liga (relaciona) um ponto a um objeto geométrico.

Teste de arrasto (*Dragging test*)*:* quando o sujeito movimenta um ponto-base (livre ou semi-livre) para verificar se a figura mantém as propriedades descobertas. No caso positivo, a figura passa no teste; em caso negativo, então a figura não foi construída de acordo com as propriedades geométricas descobertas.

Analisando o uso do modo arrastar durante a resolução das atividades nas pesquisas, Arzarello *et al*. (2002) concluem que os sujeitos aplicam as modalidades de arrasto de acordo com os objetivos alcançados por eles, e a transição de uma modalidade para outra se dá a partir do fluxo de controle acionado pelo sujeito. Sendo assim, os modos de arrasto aleatório, limite e guiado apresentam fluxo de controle ascendente; os arrastos *lócus* fictício e curva permitem uma transição do controle ascendente para o descendente; e os arrastos vinculado e teste de arrasto apresentam majoritariamente um controle descendente. A abdução encontra-se no meio destes fluxos de controle ascendente/descendente.

METODOLOGIA E CONSTRUÇÕES DO TIPO CAIXA-PRETA

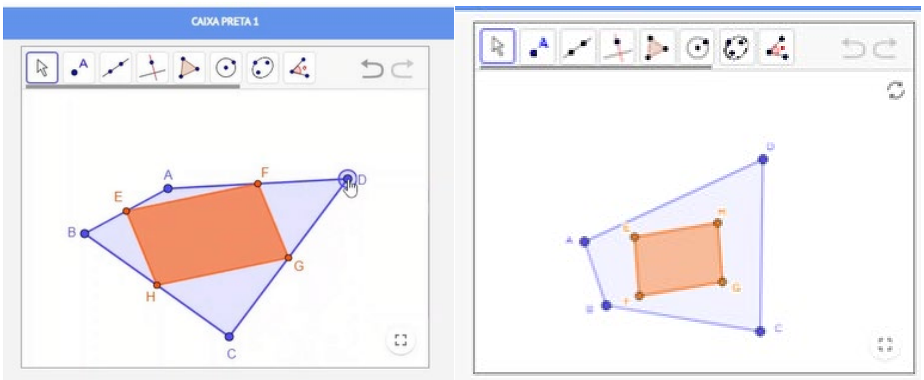
Uma caixa-preta é uma figura dinâmica a qual se pode manipular e explorar, porém sem ter acesso aos passos de sua construção. Sobre as construções do tipo caixa-preta, Gravina (2015, p. 244) afirma que “o desafio é construir uma réplica, e para isso é preciso identificar, via movimento aplicado às variáveis independentes, as regularidades da figura dinâmica.

Notare e Basso (2018) descrevem as características das atividades denominadas de caixas-pretas:

> Atividades que denominamos de "caixas-pretas" caracterizam-se por apresentar aos alunos uma situação geométrica, normalmente relacionada a um teorema clássico da geometria euclidiana, na qual os passos de construção e propriedades geométricas utilizadas são omitidos dos alunos. Estes têm acesso à construção geométrica finalizada e aos pontos livres da construção, que podem ser arrastados livremente para explorar e observar as regularidades da construção, que permanecem estáveis na variedade de configurações que surge pelo movimento contínuo dos pontos (Notare; Basso, 2018, p. 3).

As duas atividades experimentais produzidas no GeoGebra para serem aplicadas com estudantes nesta pesquisa são do tipo caixa-preta. A primeira caixa-preta proposta neste trabalho trata-se da composição de dois quadriláteros ABCD e EFGH (Figura 4a), de forma que o quadrilátero EFGH é formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer ABCD. Na construção temos como pontos livres (ponto azuis) os vértices de ABCD, de maneira que ao movimentar os pontos livres, os alunos poderiam conjecturar que se obtém sempre um paralelogramo (EFGH). A segunda caixa-preta (Figura 4b) também é composta por dois quadriláteros ABCD e EFGH, mas neste caso, os vértices do quadrilátero EFGH são formados pelos pontos médios do quadrilátero interno da caixa-preta 1. Nesta segunda caixa-preta temos novamente que, ao movimentar os pontos A, B, C e D livres, o quadrilátero EFGH mantém-se sempre paralelogramo. As atividades tinham como objetivo que os estudantes construíssem uma réplica da figura explorada e justificassem tal construção, ou seja, identificassem as regularidades e invariantes, determinassem os passos de construção que levavam a uma figura com as mesmas propriedades do objeto geométrico que eles estavam manipulando, demonstrando posteriormente a validade de tais propriedades ou características.

Figura 4 – Caixa-preta 1 (a) e caixa-preta 2 (b), ambas formadas por um quadrilátero qualquer e um paralelogramo interno



Fonte: Elaboração pelos autores

A pesquisa foi realizada com alunos do 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do IFRS – *campus* Osório, curso em que um dos pesquisadores atua como docente. Participaram da pesquisa três estudantes matriculados na disciplina de Geometria Espacial do referido curso, e para preservarmos as identidades dos participantes, iremos nos referir a eles como alunos K, L e P. Duas semanas antes da aplicação da atividade, foi disponibilizado aos alunos, um curso no Moodle elaborado pelos pesquisadores, que trazia uma introdução ao uso do GeoGebra, de modo a ambientar os estudantes em relação às ferramentas disponíveis no software e que seriam utilizadas nas atividades. Duas atividades foram elaboradas pelos pesquisadores, com o intuito de serem desenvolvidas em uma aula (4 créditos) de Geometria Espacial, das 7h05min às 22h40min. As atividades foram aplicadas por dois dos pesquisadores (que denominaremos de professor A e professor B) em um dos Laboratórios de Informática da instituição, com computadores com acesso à internet e com os softwares GeoGebra e OBS Studio instalados. O OBS Studio foi utilizado para realizar a gravação das telas e os áudios dos estudantes durante todas as manipulações no GeoGebra e todo o desenvolvimento da aula, permitindo aos pesquisadores analisarem os caminhos percorridos pelos estudantes durante a atividade bem como capturar os diálogos entre os mesmos a fim de identificar suas contribuições na realização das tarefas. O GeoGebra foi usado tanto para a manipulação da construção geométrica inicial quanto para a construção de uma réplica do objeto geométrico dado a partir da caixa-preta inicial. A internet possibilitou aos estudantes o acesso ao Moodle, onde as construções do tipo caixa-preta foram disponibilizadas aos estudantes, com o acesso liberado pouco antes da aplicação.

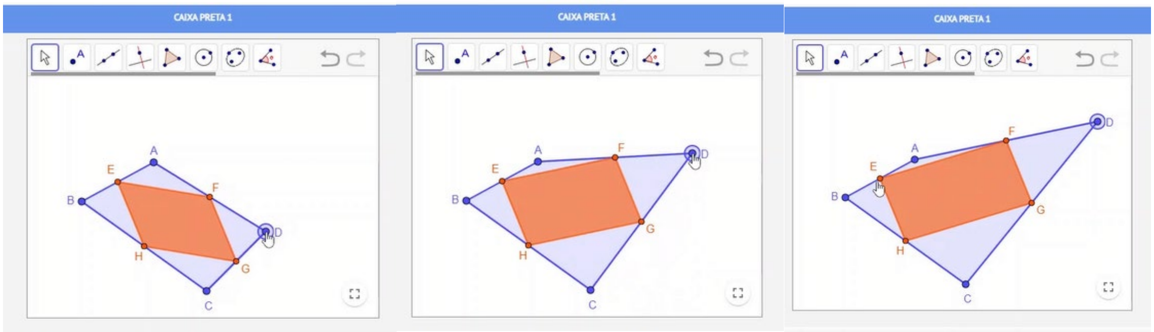
A análise dos dados coletados, realizada pelos três pesquisadores, de caráter qualitativo, teve como foco inicial identificar os modos de arrastos realizados pelos alunos e quais as contribuições dessa ferramenta do AGD para a formulação de conjecturas e identificação de propriedades geométricas. Em um segundo momento, passamos para a análise dos tipos de abstrações produzidas pelos estudantes durante a realização dos arrastos, a construção da figura com invariantes geométricos e por fim, a elaboração da demonstração matemática, esperando perceber se houve ou não um salto qualitativo no raciocínio geométrico dos estudantes. Todas as observações e análises realizadas durante e posteriormente à aplicação das atividades, apresentam como fundamentação teórica de fundo os conceitos de arrasto de Arzarello *et al.* (2002), as concepções de Gravina (2001, 2015) sobre o uso de AGD e de atividades do tipo caixas-pretas no ensino de geometria, e a epistemologia genética de Piaget (1974, 1976, 1995).

APLICAÇÃO DA CAIXA-PRETA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Iniciamos a atividade com o professor B realizando uma breve explanação das potencialidades do GeoGebra, expondo, com o auxílio de um notebook e do projetor multimídia, as principais ferramentas de geometria do software que seriam utilizadas na realização das atividades. Em seguida, iniciou-se a explicação da caixa-preta 1, enfatizando aos estudantes que a realização das atividades poderia ser feita com bastante calma, sem se preocupar com o tempo. De fato, só foi possível realizar a proposta de atividade da caixa-preta 1, com os alunos terminando as escritas das suas demonstrações matemáticas por volta das 22h10min. Apesar da atividade ser individual, os três alunos sentaram-se um ao lado do outro, de forma que todos conversaram entre si, o que permitiu aos pesquisadores analisarem as trocas de conhecimentos e cooperações na resolução de determinados impasses que apareciam ao longo da realização da atividade.

Em um primeiro momento, os alunos movimentaram os pontos livres (Figura 5a, 5b) sem se preocupar com a configuração do quadrilátero EFGH, tentando inclusive movimentar os pontos fixos da figura (Figura 5c). O modo de arrasto percebido nesta ação foi o arrasto aleatório, pois sua movimentação não era guiada por nenhuma propriedade. Podemos dizer que o controle era ascendente, pois sua exploração era ditada pela figura. Percebemos neste momento que, ao se depararem pela primeira vez com a imagem de uma caixa-preta construída, antes de qualquer manipulação, os alunos a encararam como uma figura estática, como uma foto. Nesse momento os alunos retiraram qualidades do objeto apoiados em suas observações, tais como forma, cor e posição, tratando-se então de uma abstração empírica, pois eles extraíram da imagem apenas as características observáveis. A movimentação inicial da caixa-preta também favorece a abstração pseudo-empírica, pois ao alterar, sem deformar, sua posição e tamanho, os alunos modificam o objeto geométrico a partir das suas ações, enriquecendo-o com qualidades tiradas das suas coordenações, como por exemplo a classificação das figuras geométricas que compõem o objeto geométrico em polígonos regulares, segmentos paralelos e perpendiculares e figuras inscritas e circunscritas.

Figura 5 – Movimentações diretas (a, b, c) da aluna L

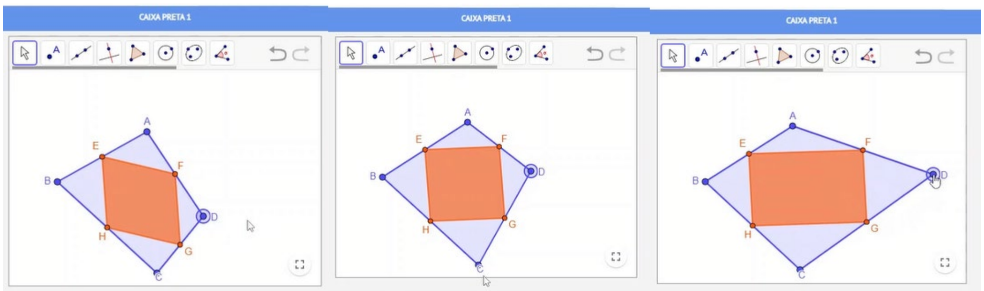


Fonte: Elaboração pelos autores

Após o professor A enfatizar aos alunos que eles deveriam movimentar os pontos de forma a encontrar uma regularidade entre o quadrilátero maior e o menor, com foco na configuração do quadrilátero EFGH, os alunos passaram a movimentar os pontos orientados pela forma que o quadrilátero menor apresenta. Nesse momento, o modo de arrasto utilizado é o arrasto guiado, pois a movimentação dos pontos livres foi direcionada pela configuração do quadrilátero EFGH.

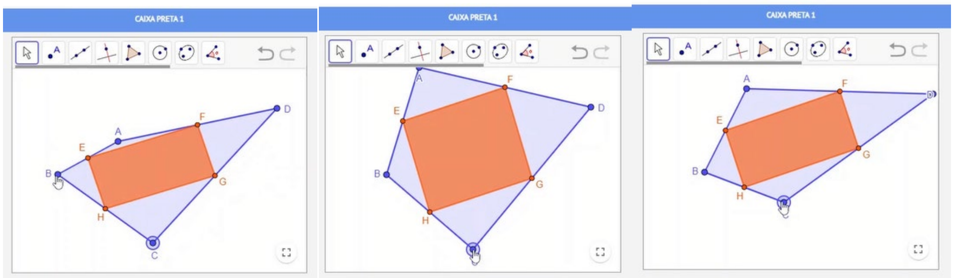
> **Professor(A)**: *Que tipo de regularidade vocês percebem? Qual a propriedade dessa figura laranja EFGH e como ela foi construída? E a última etapa é vocês demonstrarem que esta figura é o que vocês estão dizendo.*
> **Aluna(K)**: *É um losango* [Figura 6a].
> **Aluna(L)**: *Pode ficar um losango.*
> **Aluna(K)**: *É um quadrilátero.*
> **Aluna(L)**: *Mas ele se transforma em um paralelogramo, quadrado, losango. Fica um retângulo* [Figura 7].
> **Aluna(K)**: *Dá pra deixar ele um quadrado* [Figura 6b]. *Um retângulo* [Figura 6c].
> **Aluno(P)**: *Mas de qualquer forma é um quadrilátero.*

Figura 6 – Movimentações diretas (a, b, c) da aluna K



Fonte: Elaboração pelos autores

Figura 7 – Formação de retângulos (a, b, c) da aluna L



Fonte: Elaboração pelos autores

As abstrações empíricas realizadas a partir da percepção das formas que a figura apresentava conforme os estudantes utilizavam o modo de arrasto guiado possibilitou a realização de abstrações pseudo-empíricas, de forma que eles foram capazes de inserir nas figuras conceitos já abstraídos por eles (quadrilátero ser quadrado, retângulo, losango), indicando uma possível relação entre as abstrações empíricas (e talvez reflexionantes do tipo pseudo-empíricas) e os modos de arrasto de controle ascendente, ou seja, um entrelaçamento entre as teorias de Arzarello *et.al*, (1998), Gallo (1994) e Piaget (1995). Nessa etapa da atividade os estudantes ainda não foram capazes de conceituar as figuras que eles representavam ao movimentar os pontos livres da construção. Apesar de identificarem que era possível encontrar diversos tipos de quadriláteros, eles não conseguiram utilizar as definições destes quadriláteros para generalizar o quadrilátero EFGH, ou seja, não conseguiram dizer que, independentemente da configuração, o quadrilátero tratava-se sempre de um paralelogramo.

> **Professor(A)**: *Primeiro objetivo é vocês me dizerem o que esta figura laranja EFGH sempre é.*
> **Aluna(L)**: *Ela é um retângulo. Podemos fazer um quadrado.*
> **Aluna(K)**: *A gente fez um retângulo, um paralelogramo.*
> **Aluno(P)**: *Ela é um quadrilátero.*
> **Professor(A)**: *Sim, ela é um quadrilátero. Mas que tipo de quadrilátero?*

A pergunta do professor A causou um desequilíbrio nas estruturas cognitivas dos estudantes, que passaram a olhar a configuração da figura na busca por um padrão que fosse constante, não importando a forma que ela apresentasse.

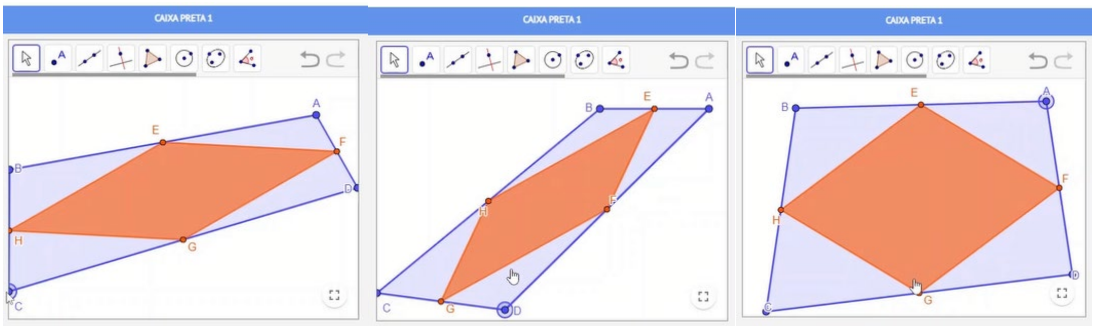
> **Aluna(K)**: *Todos que tu quiser. Tipo um padrão, não importa como tu manipular ele tem um padrão?*
> **Professor(A)**: *Sim, tem um padrão.*
> **Aluno(P)**: *É um retângulo* [apresenta uma figura que parece ser um quadrado].
> **Aluna(K)**: *Mas todos os ângulos são retos? Mas quando a gente "monta" assim, não dá um retângulo* [apresenta uma figura que parece ser um losango, sem ser quadrado].

Percebe-se que a aluna K dá um salto de qualidade em sua análise. Sua análise agora é guiada pelo conceito que define um retângulo. Seu questionamento possibilita aos outros estudantes, e a ela mesma, perceberem uma característica essencial da geometria em movimento, de que para uma figura ser definida é preciso que suas propriedades sempre sejam válidas, apresentando um caso (contraexemplo) em que a figura não aparenta possuir os ângulos retos. O dinamismo da figura possibilitou à estudante realizar abstrações reflexionantes que a permitiram afirmar que o caso geral não se tratava de um retângulo. Nesse momento, o controle passou a ser descendente, pois sua movimentação é direcionada pelo conceito da figura, indicando o entrelaçamento entre as abstrações reflexionantes (Piaget, 1995) e o controle descendente (Arzarello *et al*., 1998; Olivero, 1999; Gallo, 1994).

Mesmo após esta análise, os estudantes ainda não eram capazes de identificar que o caso geral se tratava de um paralelogramo formado pelos pontos médios do quadrilátero externo. Porém, o questionamento da aluna K fez com que o aluno P movimentasse os pontos livres da figura e percebesse que os lados opostos eram sempre iguais.

> **Aluno(P)**: *Se eu puxar assim* [movimenta os pontos A e D], fica sempre dois lados iguais [Figura 8a e 8b]. *Fica sempre o mesmo padrão.*
> **Aluna(K)**: Dois lados iguais, ou quatro lados iguais.
> **Aluno(P)**: *Ele pega sempre nos pontos médios* [figura 8c].
> **Aluno(P)**: [após movimentar figura] *Ó, pega sempre nos pontos médios.*

Figura 8 – Figura do aluno P, com lados dois a dois iguais (a, b); com a identificação dos vértices como sendo pontos médios (c)



Fonte: Elaboração pelos autores

A refutação da aluna K com relação à figura ser um retângulo fez com que o aluno P reavaliasse sua conclusão e movimentasse os pontos livres na procura de um novo padrão. Novamente o aluno passou a utilizar o modo de arrasto guiado, orientado pela configuração do quadrilátero interno. Essa busca por um novo padrão, permitiu ao aluno P observar que os pontos E, F, G e H parecem ser os pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD. A abstração empírica do objeto geométrico (forma e posição) possibilitada pela percepção do estudante, deu suporte para que ele realizasse uma abstração reflexionante e concluísse o fato dos vértices de EFGH serem pontos médios dos lados de ABCD.

> **Aluno(P)**: *O professor falou sobre pontos que movimentam na reta, mas esses pontos não estão se movimentando na reta, conforme eu movimento eles* [pontos livres] *aqui...*
> **Professor(A)**: *Tu consegue movimentar os pontos laranja E, F, G e H.*
> **Aluno(P)**: *Não, eles acompanham, o mesmo espaço que está aqui...*

No início da atividade, o professor B realizou algumas construções para apresentar o AGD GeoGebra aos alunos, uma vez que eles não tinham familiaridade com o software. Durante esta etapa, foram apresentados pontos livres, pontos semi-livres (pontos em objetos) e pontos de interseção. Nessa apresentação, comentou-se que o GeoGebra atribuía aos pontos cores distintas conforme suas características, de forma que foi dito que pontos de interseção possuíam a cor preta. Nesse momento da aula, o professor A apresentou a possibilidade de editar a cor do ponto e informou que a cor dos pontos E, F, G e H foram trocadas para laranja. Após esta informação os alunos concluíram que estes pontos se tratavam de pontos médios.

> **Aluna(K)**: *Esse pontinho aqui que formam o ângulo do quadrilátero* [E, F, G e H], *eles estão sempre no meio?*
> **Aluna(K)**: *A gente estica ele* [segmento] *e ele* [ponto] *não se move, parece estar sempre no meio.*
> **Professor(A)**: *Parece?*
> **Aluno(P)**: *Qualquer movimentação que eu faça, ele tá sempre no meio. Qualquer desenho que eu faça, ele tá sempre no ponto médio.*

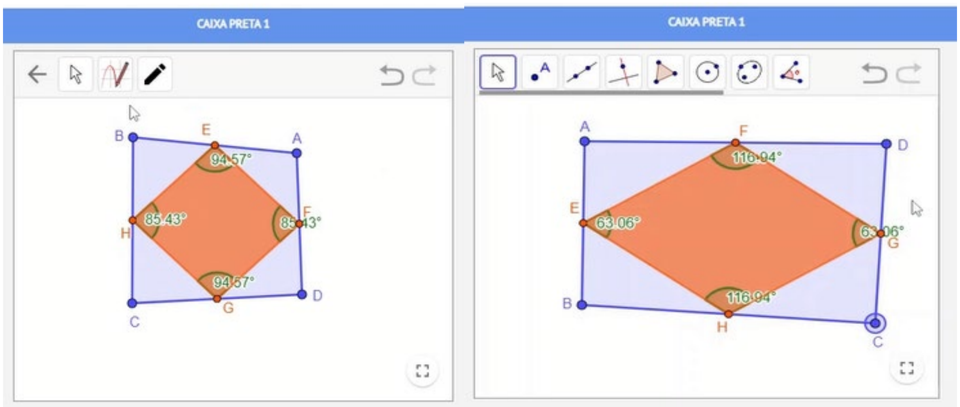
A interação entre os sujeitos e o dinamismo do AGD foi fundamental para que os alunos percebessem que os vértices do quadrilátero menor eram formados pelos pontos médios dos lados do quadrilátero maior. Para validar a observação dos estudantes, o professor B realizou a construção de um segmento e de seu ponto médio, mostrando que a movimentação do ponto médio ocorre de forma indireta, sempre que os pontos que definem o segmento são movimentados, o ponto médio também movimenta, de forma a manter a propriedade de serem colineares e equidistantes.

Mesmo após a descoberta de serem pontos médios, os alunos ainda não conseguiram definir que o quadrilátero EFGH era um paralelogramo. O professor A então iniciou uma discussão sobre a família dos quadriláteros. Baseado na conclusão da aluna K, de que os ângulos internos de um retângulo são retos, e da discussão sobre a família dos quadriláteros, chegou-se à conclusão da necessidade de medir os ângulos internos do quadrilátero EFGH.

Aluna(K): *A figura geométrica tem que ter as propriedades da anterior e mais a que dá característica para ela, que deixa ela única, para dizer que ela pertence àquela família. Que nem o quadrado é retângulo, o quadrado é retângulo porque tem os quatro ângulos retos, mas é quadrado porque tem os quatros lados iguais.*
Aluno(P): *Mas ele é um paralelogramo.*
Aluna(K): *Se a gente parte do quadrado, né? Quadrado tem os quatro lados iguais e os ângulos retos.*
Professor(A): *Dá pra dizer que ele é um retângulo?* [quadrilátero EFGH]
Aluna(L): *Não, porque não tem os quatro ângulos retos.*
Aluna(K): *Como é que tu sabe?*
Professor(A): *Tem como colocar a ferramenta 'Medir ângulo', se quiser tirar a dúvida.*

O professor B então apresentou, na tela do GeoGebra projetada no quadro branco, a ferramenta 'Medir ângulo' na barra de ferramentas do GeoGebra, a partir de um quadrilátero construído a mão livre que parecia ser um paralelogramo. Ao medir os ângulos internos foi verificado que os ângulos opostos não eram congruentes, concluindo que a figura não era um paralelogramo e que apenas a intuição não é suficiente para afirmar que uma figura possui uma propriedade geométrica. Em seguida, o professor A apresentou a definição de paralelogramos para os estudantes, identificando que esta figura geométrica possui os lados opostos paralelos e congruentes, bem como a propriedade de que os ângulos opostos são congruentes. A partir dessa discussão, os alunos concluíram que a figura EFGH era um paralelogramo, utilizando a ferramenta 'Medir ângulo' para verificar se os ângulos opostos do quadrilátero EFGH eram congruentes. O modo de arrasto nesse momento é o teste de arrasto, uma vez que a movimentação dos pontos livres ocorria para verificar se a figura mantém a propriedade descoberta (ângulos opostos congruentes). O sentido do controle é descendente, pois sua manipulação é orientada pela definição de paralelogramo.

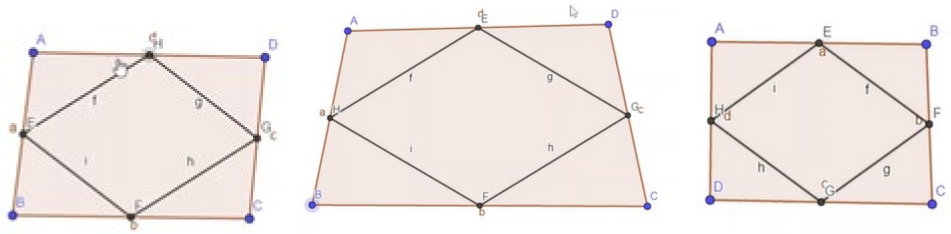
Figura 9 – Construções com o uso da ferramenta 'Medir ângulo'



Fonte: Elaboração pelos autores

A intervenção dos professores deu suporte para que os estudantes conseguissem identificar que o quadrilátero menor é paralelogramo, o que mostra a importância de se causar desequilíbrios nas estruturas cognitivas dos estudantes que permitam a eles realizarem abstrações que resultem em construção de conceitos. Com as conclusões obtidas a partir da exploração da caixa-preta, os estudantes foram capazes de realizar a construção no AGD GeoGebra. Chamou a atenção que, ao reproduzirem a construção, os alunos procuraram construir figuras ditas prototípicas, de forma que o quadrilátero externo apresentava configurações tradicionais, como usualmente apresentadas nos livros didáticos, como os lados paralelos às bordas da tela.

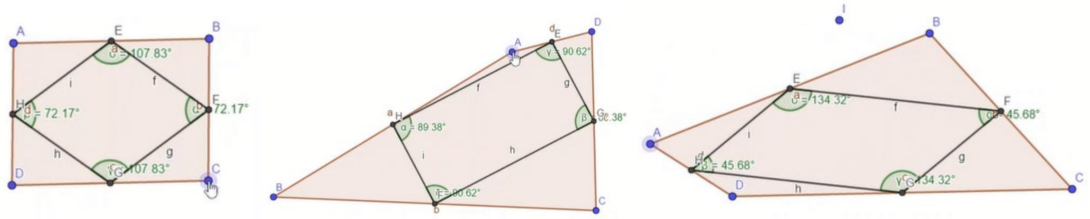
Figura 10 – Construções dos alunos P (a), K (b) e L (c)



Fonte: Elaboração pelos autores

Ao movimentar os pontos para verificar se as propriedades do paralelogramo se mantinham na sua construção (auxiliados pela ferramenta ‘Medir ângulo’), os estudantes utilizaram o modo teste de arrasto, cujo fluxo de controle é descendente. Percebeu-se neste momento que, quando os alunos, ainda na tentativa de entender o comportamento da figura, inserem nela novos objetos geométricos, eles encontram-se no processo da abstração pseudo-empírica. Nessa etapa, eles realizam ações sem compreender realmente o porquê as fazem, mas essas construções quase intencionais, aguçam sua curiosidade e causam desequilíbrios nas suas estruturas cognitivas, de forma que eles reorganizam essas estruturas, modificando-as através de processos de abstração reflexionante propriamente dita, em função da movimentação dessa nova figura geométrica construída com estes novos elementos inseridos por eles. Essa reorganização permitiu a eles identificarem como construir a réplica da caixa-preta, e ao refletirem sobre as ações que os levaram a estes modelos é que se inicia o processo de abstração refletida. Nessa etapa o sujeito começa a premeditar suas ações intencionalmente, prevendo e conjecturando possíveis resultados de suas construções. Ele é capaz de relacionar os objetos geométricos a partir de suas propriedades e as consequências que a inserção de novos elementos geométricos produz na figura dinâmica apresentada inicialmente a eles. Trata-se de uma metarreflexão, de uma abstração reflexionante com tomada de consciência, pois agora o aluno age sobre a figura e compreende as consequências e regularidades oriundas da sua ação, reforçando a nossa percepção da existência de uma estreita relação entre o teste de arrasto, de fluxo de controle descendente (Arzarello *et al*. 1998; Olivero, 1999; Gallo 1994), com as abstrações reflexionantes (do tipo pseudo-empíricas, reflexionantes propriamente ditas e refletida) (Piaget (1995).

Figura 11 – Teste de arrasto utilizado pelos alunos P (a, b) e L (c)



Fonte: Elaboração pelos autores

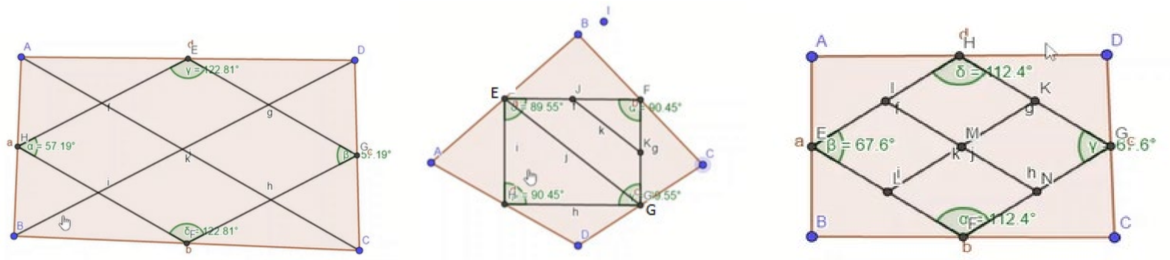
Na última etapa da atividade, os alunos deveriam demonstrar, a partir da construção realizada por eles, que o quadrilátero menor era um paralelogramo. Para tanto, foi preciso apresentar para eles o teorema da base média de um triângulo, uma vez que eles não tinham conhecimento ou não lembravam de tal propriedade. Na demonstração, o professor B utilizou o caso de semelhança Lado – Ângulo - Lado (LAL), fazendo uma breve exposição no quadro-branco da sala, que até o momento havia sido utilizado apenas para a projeção da janela do GeoGebra e com as construções e explicações auxiliares.

Após o momento de explicação, o aluno P introduziu as diagonais do quadrilátero ABCD para auxiliá-lo no processo de demonstração. Porém ele não conseguiu utilizar o teorema da base média, talvez por ter inserido as duas diagonais, o que dificultou a visualização do quadrilátero dividido em dois triângulos de mesma base (Figura 12a).

> **Aluno(P)**: *Me tira uma dúvida, eu posso usar uma diagonal, se eu quiser usar ela pra provar?*
> **Professor(A)**: *Pode. Pode sim.*

O aluno P tentou realizar uma demonstração utilizando os quadriláteros e triângulos inseridos na sua figura, porém sem sucesso. As alunas L e K trabalharam juntas, cada uma na sua construção, e após ouvir o comentário do colega P, acabaram construindo objetos geométricos distintos. A aluna K construiu uma das diagonais do quadrilátero menor (segmento EG) e, em seguida, construiu os pontos médios J e K de dois lados do quadrilátero EFGH e o segmento determinado por eles (Figura 12b). A aluna L construiu os pontos médios I, K, L e N dos lados do quadrilátero EFGH e os segmentos IN e LK com extremidades nestes pontos médios (Figura 12c).

Figura 12 – Adição de objetos geométricos feitos por P (a), K (b) e L (c)



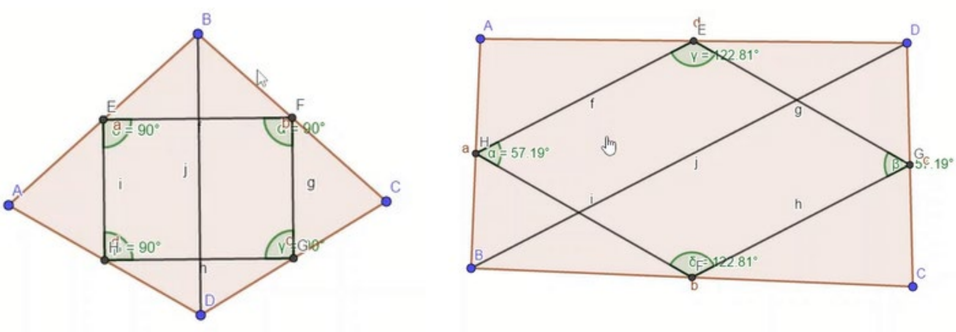
Fonte: Elaboração pelos autores

> **Aluna(L)**: *Pra ti 'brilhou' alguma coisa?*
> **Aluna(K)**: *Deixa eu ver...* [movimenta os pontos A e C da figura e observa seu comportamento]
> **Aluna(L)**: *É pra provar o de dentro né?*
> **Aluna(K)**: *É.*
> **Aluna(L)**: *A gente pode fazer, aqui separa em dois triângulos.*
> **Aluna(K)**: *Eu pensei em fazer...*
> **Aluna(L)**: *Aí depois fazer os dois pontos médios.*

Após a tentativa de demonstração do aluno P e a verificação de que as alunas K e L não estavam utilizando a diagonal do quadrilátero maior, o professor A interveio novamente e sugeriu que os estudantes utilizassem apenas uma das diagonais do quadrilátero ABCD, lembrando que, se provassem que os lados opostos do quadrilátero EFGH fossem congruentes e paralelos, estaria provado que a figura é um paralelogramo.

> **Professor(A)**: *Pensem, a diagonal divide o quadrilátero em?*
> **Aluna(L)**: *Tá professor, aqui é a base* [ela aponta para o segmento BD (Figura 13a), construída pela colega K]. *Tá e agora eu faço baseado no teorema Lado, Ângulo, Lado* [semelhança de triângulos utilizada para demonstrar o teorema da base média]?

Figura 13 – Construção do quadrilátero maior com a diagonal BD, feitos por K (a) e P (b)



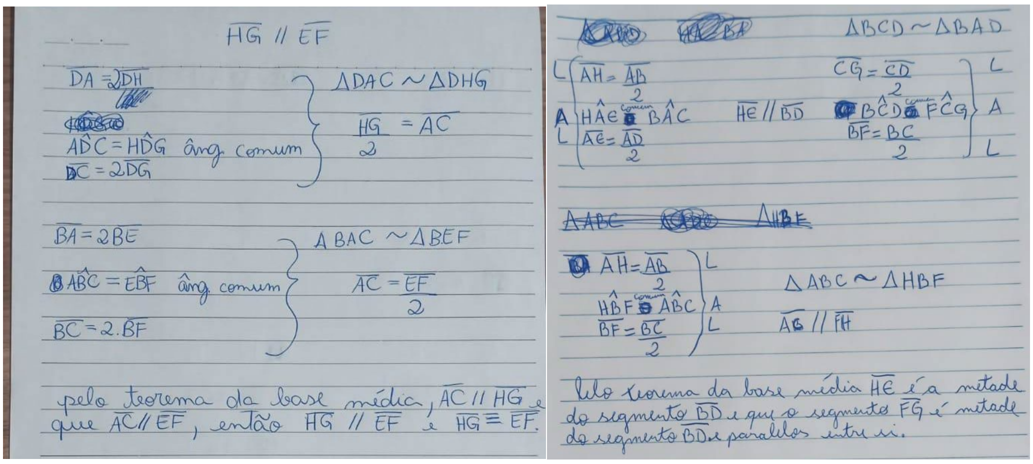
Fonte: Elaboração pelos autores

Apoiados na construção realizada no GeoGebra, os alunos conseguiram identificar que a diagonal divide o quadrilátero ABCD em dois triângulos de mesma base.

> **Professor(A)**: *O que que tu sabe desse 'cara'* [BD] *em relação a esse aqui* [EH]?
> **Aluna(L)**: Que esse é duas vezes esse.
> **Professor(A)**: *E o que tu sabe desse aqui* [BD] *em relação a esse daqui* [FG]?
> **Aluna(L)**: *Que também é duas vezes aquele.*

Os alunos apresentaram dificuldades na hora da escrita de sua demonstração, fato que pode ser percebido pelas escritas dos alunos L e P (Figura 14). Mesmo após identificar que os lados opostos eram congruentes e paralelos, eles não conseguiram escrever corretamente a demonstração completa de que EFGH era um paralelogramo, indicando a falta de familiaridade com a escrita de textos que utilizam a simbologia matemática, especialmente as demonstrações matemáticas formais.

Figura 14 – Demonstrações realizadas pelos estudantes L (a) e P (b)



Fonte: Elaboração pelos autores

Nenhum dos estudantes conseguiu utilizar o teorema da base média de forma direta; todos reproduziram a demonstração do teorema para afirmar que os lados opostos mediam a metade da diagonal e que estes lados eram paralelos. Foi preciso o auxílio dos professores para que eles conseguissem minimamente escrever corretamente a demonstração matemática.

CONCLUSÃO

Na exploração de caixas-pretas temos um profícuo espaço de interação entre sujeito e objeto, condição necessária para a abstração reflexionante, visto que o dinamismo do GeoGebra oportuniza aos alunos agir sobre os objetos, coordenar as suas ações durante a manipulação e exploração da construção geométrica e tomar consciência das suas ações e das descobertas realizadas. Isto mostra que o AGD potencializa os processos de abstração empírica, pseudo-empírica, reflexionante propriamente dita e refletida, fazendo com que o aluno saia das ações de experimentação para as ações planejadas e dedutivas, contribuindo deste modo para a transição do conhecimento empírico para o conhecimento lógico-dedutivo alcançado por meio de abstrações reflexionantes.

O uso de AGD possibilita aos estudantes a exploração de objetos geométricos de forma que as propriedades geométricas definidas nas construções se mantenham mesmo após a movimentação de objetos livres. Isto permite aos alunos, conjecturar, testar, tentar demonstrar a propriedade percebida e chegar a uma generalização, um dos produtos de uma abstração reflexionante (Piaget, 1995). Durante a manipulação da caixa-preta, percebemos que os modos de arrasto utilizados pelos alunos foram o arrasto aleatório, o arrasto guiado e o teste de arrasto (Arzarello *et al*., 1998; Olivero, 1999), os dois primeiros mantendo o controle ascendente e no último predominando o controle descendente (Gallo, 1994). Além disso, percebemos uma estreita relação entre as abstrações empíricas e o controle ascendente, durante as ações de arrasto aleatório e guiado, bem como a relação das abstrações reflexionantes com o controle descendente ativado durante o teste de arrasto, o que mostra um entrelaçamento entre os conceitos de Gallo (1994), Arzarello et.al (1998) e Piaget (1995), que pode ser explorado em pesquisas futuras nesta área.

Os alunos conseguiram identificar o paralelismo e a congruência entre os lados opostos do quadrilátero EFGH, condição necessária para a realização da demonstração proposta, mas não suficiente. Eles conseguiram construir a réplica da construção geométrica da caixa-preta, porém apresentaram dificuldades para interpretar as propriedades e elementos geométricos observados durante a exploração e manipulação da figura e utilizá-las na escrita da demonstração solicitada. Ademais, é perceptível a falta de familiaridade com a escrita de demonstrações matemáticas, tanto pelos questionamentos apresentados pelos alunos na hora de realizar a escrita matemática, quanto pela dificuldade de aplicar um encadeamento lógico na descrição das condições, hipóteses e teses que envolvem a demonstração das propriedades geométricas exploradas na atividade.

As abstrações empíricas e reflexionantes realizadas durante a exploração da caixa-preta deram suporte para que os estudantes conseguissem identificar a relação entre a diagonal do quadrilátero maior e os lados do quadrilátero menor, opostos a essa diagonal, abstraindo parcialmente os elementos da demonstração do teorema da base média e aplicando-os na prova que eles deviam realizar. É claro que as intervenções dos professores contribuíram para a ocorrências dessas abstrações, o que mostra que uma das funções do professor é justamente causar desequilíbrios que possibilitem aos estudantes reequilibrarem suas estruturas cognitivas de forma a dar um salto de complexidade nas mesmas.

Sendo assim, é importante que professores e pesquisadores proponham e articulem estratégias que possibilitem aos estudantes explorarem as construções geométricas de forma ativa, em que eles objetifiquem o modo de arrastar disponível no AGD, de forma a desenvolver nos alunos não só a construção de conjecturas, mas também possibilitar o desenvolvimento das habilidades de escrita de demonstrações matemáticas e de aprimoramento do raciocínio geométrico.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS pelo apoio à realização e publicação desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ARZARELLO, F. Dragging, perceiving and measuring physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. **Proc. Cabriworld 2**, Montreal, Plenary Lecture, 2001. Disponível em https://patrickmoisan.net/documents/publications/cw2001/2001/contributions/Arzarello.pdf.

ARZARELLO, F.; GALLINO, G.; MICHELETTI, C.; OLIVERO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. **Proceedings of PME XXII**, Stellenbosh, South Africa, v. 2, p. 32-39, 1998.

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D; ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. **ZDM**, v. 34 (3), p. 66-72, 2002. Disponível em https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655708.

BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Generating conjectures through dragging in dynamic geometry: The maintaining dragging model. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 15, n. 3, p. 225-253, 2010. Disponível em https://link.springer.com/article/10.1007/s10758-010-9169-3.

BACCAGLINI-FRANK, A. Dragging and making sense of invariants in dynamic geometry. **The Mathematics Teacher**, v. 105, n. 8, p. 616-620, 2012. Disponível em https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/105/8/article-p616.xml.

BARBOSA, L. S.; MENEGHETTI, C. M. S.; POFFAL, C. A. O uso de geometria dinâmica e da investigação matemática na validação de propriedades geométricas. **Revista Ciência e**

Natura. UFSM, Santa Maria, v. 41, 2019. Disponível em https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/33752/e12?inline=1#_bookmark54

BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Penso, 2012.

BECKER, F. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Schème**: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. v. 6, n. esp., p. 104-128, 2014. Disponível em https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/4276.

GALLO, E. Control and solution of "algebraic problems". **Rendiconti del Seminario Matematico**, v. 52, n.3, p. 263-278, 1994. Disponível em http://www.seminariomatematico.polito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/263.pdf.

GOLDENBERG, E. P. Ruminations about dynamic imagery (and a Strong Plea for Research). In: R., Sutherland; J., Mason (Eds.). **Exploiting Mental Imagery with Com- puters in Mathematics Education.** Berlin: Springer, p. 202-224, 1995. Disponível em https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-642-57771-0_14.pdf.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015. Disponível em https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/605/561.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. UFRGS, Porto Alegre/RS. 2001. Disponível em https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/2545/000321616.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **Revista Novas Tecnologias na Educação,** v.9, nº1, UFRGS, 2011. Disponível em https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917.

HÖLZL, R. How does ‘dragging’ affect the learning of geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 1, p. 169-187, 1996. Disponível em https://link.springer.com/article/10.1007/BF00571077.

LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Discernment of invariants in dynamic geometry environments. **Educational Studies in Mathematics**, v. 84, p. 439-460, 2013. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-013-9492-4.

LEUNG, A. Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 13, p. 135-157, 2008. Disponível em https://link.springer.com/article/10.1007/s10758-008-9130-x.

MAGNANI, L. **Ingegnerie della conoscenza**. Milano: Marcos y Marcos, 1997.

MARIOTTI, M. A. Proof and proving in mathematics education. In: A., Gutiérrez; P., Boero (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers (ISBN 9077874194), p. 173-204, 2006. Disponível em https://brill.com/display/book/9789087901127/BP000008.xml.

MARTON, F.; RUNESSON, U.; TSUI, A. B. M. The space of learning. In: MARTON, F.; TSUI, A. (Eds.). **Classroom discourse and the space of learning**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers, p. 3-40, 2004. Disponível em https://www.routledge.com/Classroom-Discourse-and-the-Space-of-Learning/Marton-Tsui-Chik-Ko-Lo/p/book/9780805840094.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. de A. Argumentação e prova matemática com geometria dinâmica. **RENOTE**: Revista novas tecnologias na educação. Porto Alegre, 2018. Disponível em https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86021.

OLIVERO, F. Cabri-Géométre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. In: W. Maull; J. Sharp (eds.). **Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching**. University of Plymouth, UK. Olivero, Federica. (2002). Proving within dynamic geometry environments, Ph. D. Thesis, Graduate School of Education, Bristol. Plymouth, UK. 1999.

OLIVERO, F. The proving process within a dynamic geometry environment. **Unpublished PhD Thesis**, University of Bristol, Bristol, UK. 2002.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana:** concepções de estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique. 2015. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC, São Paulo/SP. 2015. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11035.

PIAGET, J.; GRÉCO, P. **Aprendizagem e conhecimento**. Trad.: Equipe da Livraria Freitas Bastos. Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas**: problema central do desenvolvimento. Trad. Marion Merlone Dos Santos Penna. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais [1977]. Tradução: Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PEIRCE, C. S. Collected papers of Charles Sanders Peirce/Vol. 2 Elements of logic. **Collected Papers of Charles Sanders Peirce**, 1960.

SOUZA, S. de. **Geometria na educação infantil:** da manipulação empirista ao concreto piagetiano. 2007. 147f. Dissertação (Curso de Pós-Graduação em Educação para Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá/PR. 2007. Disponível em http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4453.